WZB

Frank Hüber*

Manipulationsanreize im Gale-Shapley-Algorithmus: ein Literaturüberblick

discussion paper

Discussion Paper SP II 2011-203

Juli 2011

Social Science Research Center Berlin (WZB)

Research Area:
Markets and Politics

Research Unit:
Market Behavior

http://www.wzb.eu/mp/vam

E-mail: hueber@wzb.eu

Wissenschaftszentrum Berlin für Sozialforschung (WZB) •
Reichpietschufer 50 • D-10785 Berlin • www.wzb.eu

Author: Frank Hüber
Title: Manipulationsanreize im Gale-Shapley-Algorithmus: ein Literaturüberblick
Discussion Paper SP II 2011-203
Wissenschaftszentrum Berlin für Sozialforschung (2011)

Für wertvolle Kommentare und Unterstützung danke ich Dorothea Kübler und Julia Schmid. Dieses Papier beruht auf Teilen meiner Studienarbeit, die an der Technischen Universität Berlin eingereicht und anerkannt wurde.
*Wissenschaftszentrum Berlin für Sozialforschung (WZB). Adresse: Reichpietschufer 50, 10785 Berlin, Germany. Email: hueber@wzb.eu (corresponding author).

Social Science Research Center Berlin (WZB)

Research Area:
Markets and Politics

Research Unit:
Market Behavior

Wissenschaftszentrum Berlin für Sozialforschung gGmbH (WZB)

Forschungsschwerpunkt:
Märkte und Politik

Abteilung:
Verhalten auf Märkten

Reichpietschufer 50, D-10785 Berlin
Telefon: +49 30 25491-0, Fax: +49 30 25491-442

http://www.wzb.eu

Zusammenfassung

Die von Gale und Shapley in ihrem 1962 veröffentlichten Artikel „College Admissions and the Stability of Marriage" vorgestellte „deferred acceptance procedure" hat in der Literatur zu einer umfassenden Diskussion über Zuordnungsverfahren auf zweiseitigen Märkten geführt, die sich mit der Fragestellung beschäftigen, wie die Agenten zweier disjunkter Mengen anhand gegenseitiger Präferenzlisten einander zugeordnet werden können. Dem von Gale und Shapley vorgestellten Algorithmus kam dabei in den letzten Jahren nicht nur in der Theorie eine große Bedeutung zu, sondern auch in der Praxis wird dem Versagen zahlreicher Märkte mit solchen Mechanismen entgegengetreten. Diese Arbeit geht ausführlich auf die von Gale und Shapley entwickelte „deferred acceptance procedure" und die sich hieraus ergebenden Manipulationsanreize auf zweiseitigen Märkten anhand des Hochzeits- und „college admissions"-Problems ein. Die im jeweiligen Modell resultierenden Manipulationsanreize werden in vier Arten von Manipulationen gegliedert -- die Manipulation anhand von Präferenzen, anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen, anhand von „endowments" und anhand der Quote -- und jeweils miteinander verglichen. Dabei wird deutlich, dass weder die „deferred acceptance procedure" noch irgendein anderes Zuordnungsverfahren, das stabile Zuordnungen ergibt, vollständig immun gegen Manipulationen ist. Anhand zahlreicher Theoreme und Überlegungen kann jedoch gezeigt werden, dass die Anreize oft nur für eine Seite des Marktes existieren und bei größer werdenden Märkten in der Praxis sogar abnehmen.

Keywords: Matching, university admission, manipulation, strategic behavior
JEL Classi cation: C78, D78, I29

Abstract

The “deferred acceptance procedure” introduced by Gale and Shapley in their article “College Admissions and the Stability of Marriage” (1962) led to a huge and still growing discussion in the literature on two-sided matching markets. The algorithm didn’t only become important in theory but is also often used in practice by policymakers to confront market failure. This paper explains the “deferred acceptance procedure” in detail and presents a survey on the resulting manipulability on two-sided matching markets, e.g., within the marriage and college admissions problem. The incentives to manipulate are categorized in four groups of manipulations – manipulation via preferences, via pre-arranged matches, via endowments and via capacities – and are then compared for both problems. It is shown that there exists no stable matching procedure that is strategy-proof for all agents. But in practice many incentives to manipulate only apply to one side of the market and decrease with the size of the market.

1 Einleitung

Zuordnungsverfahren auf zweiseitigen Märkten beschäftigen sich mit der Fragestellung, wie Agenten der jeweils anderen Seite anhand gegenseitiger Präferenzlisten einander zugeordnet werden können. Von zentraler Bedeutung ist dabei nicht nur die Fragestellung, ob für derartige Probleme immer eine Lösung existiert, sondern auch, ob es stabile und optimale Zuordnungen gibt und welche Anreize für die Agenten bestehen, diese Spiele zu manipulieren, um sich selbst besserzustellen. Dabei ist die von Gale und Shapley (1962) eingeführte *„deferred acceptance procedure"*, auch Gale-Shapley-Mechanismus oder *„deferred acceptance algorithm"* genannt, von zentraler Bedeutung für die Literatur von Zuordnungsverfahren auf zweiseitigen Märkten mit disjunkten Mengen von Agenten.[1] Als Teilbereich der Mechanismus-Design-Theorie, für welche im Jahr 2007 der Preis für Wirtschaftswissenschaften in Gedenken an Alfred Nobel an die drei US-Forscher Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin, Roger B. Myerson vergeben wurde[2], kam den Zuordnungsproblemen auf zweiseitigen Märkten in den letzten Jahren nicht nur in der Literatur durch neue theoretische Fragestellungen und den umfassenden Überblick der Thematik durch Roth und Sotomayor (1990) eine große Bedeutung zu. Auch in der Praxis gewann die *„deferred acceptance procedure"* an Bedeutung und wurde mit entsprechenden Anpassungen an die jeweiligen Umstände in den vergangenen Jahren beispielsweise in zentrale Clearinghäuser für die Zulassung zu high schools in New York City und öffentliche Schulen in Boston sowie im Markt für medizinische Stipendien in den USA und dem Arbeitsmarkt für Mediziner in Kanada und Großbritannien implementiert.[3]

Dabei handelte es sich bei dem 1962 erstmals veröffentlichten Algorithmus keineswegs um eine gänzlich neue Herangehensweise an solche Probleme, da ein entsprechender Ansatz bereits seit 1950 in den USA im National Resident Matching Program (NRMP), damals noch National Intern Matching Program (NIMP) genannt, zum Einsatz kam, um angehende Ärzte und Krankenhäuser zuzuordnen.[4]

Die von Gale und Shapley (1962) für das Hochzeitsproblem eingeführte *„deferred acceptance procedure"* kann auch auf das allgemeinere Modell des *„college admissions problems"* angewandt werden, bei dem im ursprünglichen Modell Studenten und Universitäten einander zugeordnet werden, wobei die Universitäten anders als im Hochzeitsmodell mit mehr als einem Studenten verbunden werden können.[5] Hieraus ergeben sich für das Modell jedoch auch weitere Probleme und Einschränkungen etwa durch zusätzliche Manipulationsmöglichkeiten anhand der Quote, d.h. der maximal zu vergebenen Anzahl an Studienplätzen durch eine Universität. Das „college admissions problem" hat eine weite Verbreitung und Anwendung auf den

[1] Vgl. Roth (2008), S. 537.
[2] Vgl. Committee (2007), S. 6.
[3] Vgl. Roth (2008), S. 538, S. 548 ff für einen geschichtlichen Überblick.
[4] Vgl. Roth (1984a), S. 1013.
[5] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 11; vgl. weiter Roth (1985), S. 277, S. 281.

(Arbeits-)Märkten der Medizin[6], Universitäten[7] und Schulen[8] erlangt.

Ziel dieser Arbeit ist es einen zusammenfassenden Überblick über die zahlreichen, teils jüngsten Ergebnisse zum Hochzeitsproblem und *„college admissions problem"* zu geben. Es wird versucht, die in der Literatur auf Basis mannigfaltiger Notationen getroffenen, meist unterschiedlich formulierten Theoreme zu gliedern und zu generalisieren. Darüber hinaus werden ausgehend von diesen Ergebnissen die Manipulationsanreize für beide Seiten des jeweiligen Marktes beleuchtet und gegenübergestellt. Aufgrund der zahlreichen Veröffentlichungen und Richtungen, die die Forschung in den letzten Jahren hervorgebracht hat, kann aber auch diese Arbeit nur einen Ausschnitt des umfassenden Forschungsgebietes darbieten.

Im 2. Kapitel werden die theoretischen Grundlagen für die weitere Arbeit gelegt. Neben einer allgemeinen Einführung in die Mechanismus-Design-Theorie wird die Grundlage für die im Folgenden behandelten Zuordnungs- und Allokationsprobleme auf zweiseitigen Märkten geschaffen. Im 3. Kapitel wird als grundlegendes Modell zweiseitiger Märkte das Hochzeitsproblem von Gale und Shapley (1962) sowie die zugehörige *„deferred acceptance procedure"* erläutert und anhand eines Beispiels ausführlich dargelegt, ehe auf die sich hieraus ergebenden Theoreme eingegangen wird. Das sich aus dem Hochzeitsproblem ableitende, allgemeinere *„college admissions problem"* ist Gegenstand des 4. Kapitels. Nach einer Darstellung des Modells und der Unterschiede zum Hochzeitsproblem werden die zuvor getroffenen Theoreme bezüglich ihrer Übertragbarkeit auf das *„college admissions problem"* hin untersucht. Kapitel 5 widmet sich wiederum vergleichend den sich aus beiden Modellen ergebenden Manipulationsanreizen. Hierbei werden vier grundlegende Manipulationstypen unterschieden: die Manipulation anhand von Präferenzen, anhand von Quoten, anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen und anhand von *endowments*. Mit einer Diskussion der wesentlichen Befunde sowie Implikationen für zukünftige Forschungen sowie den Einsatz der vorgestellten Modelle und Algorithmen in der Praxis schließt das 6. Kapitel die Arbeit ab.

2 Theoretische Grundlagen

Ehe auf das eigentliche Thema und die hieraus für diese Arbeit resultierenden Fragestellungen eingegangen wird, sollen zunächst einige Grundlagen angesprochen werden, die zum Verständnis der Thematik erforderlich sind.

2.1 Mechanismus-Design-Theorie

Was verbirgt sich hinter der Mechanismus-Design-Theorie, für deren Grundlagenschaffung von der Königlich Schwedischen Akademie der Wissenschaften im Jahr 2007 gar der Preis für Wirtschaftswissenschaften in Gedenken an Alfred Nobel an die drei US-Forscher Leonid Hurwicz, University of Minnesota, Eric S. Maskin,

[6] Vgl. Roth (1984a), S. 991 ff; vgl. weiter Sönmez (1997), S. 197; vgl. weiter Roth (2008), S. 548 ff und viele andere.
[7] Vgl. Abdulkadiroglu, Pathak et al. (2005), S. 5 ff.
[8] Vgl. Ergin und Sönmez (2006), S. 216 ff.

Institute for Advanced Study, Princeton, und Roger B. Myerson, University of Chicago, vergeben wurde?[9] Sie reihen sich dabei in eine Liste namhafter Spieltheoretiker ein, da vor ihnen bereits acht Forscher für ihre spieltheoretischen Arbeiten mit dem begehrten Nobelpreis ausgezeichnet wurden. Unter ihnen Herbert Simon, John F. Nash, Reinhard Selten, John Harsanyi und William Vickrey.[10]

Die Erläuterungen der Theorie fallen jedoch ebenso vielfältig aus, wie ihre Anwendungsbereiche[11], auch wenn sie stets auf dieselbe Thematik zielen. Anlässlich der Verleihung dieses Nobelpreises für Wirtschaft versuchte sich das *Handelsblatt* an einer Erläuterung der Mechanismus-Design-Theorie, die auch als Implementations-Theorie bezeichnet wird[12], da diese einen wichtigen Teil der Mechanismus-Design-Theorie ausmacht[13], und umschrieb sie mit der Fragestellung „wie und mit welchen Verfahren („Mechanismen“) Menschen die Verteilung knapper Ressourcen am besten organisieren sollten“[14]. Ausgangspunkt hierfür bieten die Beschreibungen der „unsichtbaren Hand des Marktes“ von Adam Smith aus dem Jahr 1776 und die Erkenntnisse, dass die postulierten Preismechanismen und der Zusammenhang von Angebot und Nachfrage oft nur unter unrealistischen Bedingungen wie vollständiger Konkurrenz, vollständig substituierbaren Gütern und vollständiger Information funktionieren.[15] In der Realität müssen jedoch externe Effekte und Informationsasymmetrien berücksichtigt werden, die dazu führen, dass das Handeln der Menschen nicht zu optimalen Ergebnissen führt.[16] Die zentralen Fragestellungen der Theorie sind dabei, wie und wann Märkte funktionieren, wann sie versagen und welche unterschiedlichen Mechanismen es zur Allokation der betrachteten Ressourcen gibt.[17] Die Mechanismus-Design-Theorie versucht somit zu beantworten, wie die Regeln bzw. Anreize formuliert werden müssen, damit es trotz beispielsweise asymmetrischer Informationen zu einem effizienten bzw. gesellschaftlich gewünschten Resultat kommt. Im Zentrum der Betrachtung steht demnach, wie bereits erwähnt, die Gestaltung optimaler Allokationsmechanismen.[18]

Nach Nisan und Ronen ist die Mechanismus-Design-Theorie bemüht zu untersuchen, wie privat bekannte Präferenzen von vielen Personen zu einer sozialen Auswahl, „social choice“, aggregiert werden können. Der Schwerpunkt und das Interesse an der Theorie sind dabei häufig auf Auktionen gelegt, wohl aufgrund der Bedeutung für große Privatisierungen und die Vergabe von Frequenzen.[19] Hier zeigt die Theorie auf, warum eine Auktion meistens die effektivste Methode zur Allokation öffentlicher Güter unter bekannten, potentiellen Käufern ist und kann darüber hinaus häufig auch die Frage beantworten, welche Art von Auktion für den Verkäufer den höchsten erwarteten Erlös erzielen wird.[20] Darüber hinaus kommt die Theorie beispielsweise

[9] Vgl. Committee (2007), S. 6.
[10] Vgl. Berger und Multerer (2007).
[11] Vgl. Berger und Multerer (2007).
[12] Vgl. Maskin und Baliga (2003), S. 4.
[13] Vgl. Committee (2007), S. 3.
[14] Storbeck (2007).
[15] Vgl. Storbeck (2007); vgl. weiter Committee (2007), S. 1.
[16] Vgl. Berger und Multerer (2007).
[17] Vgl. Storbeck (2007).
[18] Vgl. Berger und Multerer (2007).
[19] Vgl. Nisan und Ronen (2001), S. 169.
[20] Vgl. Committee (2007), S. 1.

auch bei der Theorie der Monopolpreise, der optimalen Bestimmung von Steuern und Abstimmungsverfahren zum Einsatz.[21]

Ein Bereich der traditionellen Mechanismus-Design-Theorie behandelt somit die Thematik, wie sich optimale Mechanismen finden lassen, die den erwarteten Erlös des Planers maximieren.[22] Ein anderer Teil der Theorie behandelt die Fragestellung, wie sich nicht unbedingt optimale aber effiziente Mechanismen schaffen lassen, bei denen nicht die Maximierung des Erlöses sondern die soziale Effizienz im Vordergrund steht.[23]

In der Mechanismus-Design-Theorie wird somit der inverse Ansatz klassischer spieltheoretischer Problemstellungen verfolgt. Statt die gegebenen Ergebnisse eines Spiels und die Art und Weise, wie die Spieler ein gegebenes Spiel spielen, zu betrachten, wird für ein festgelegtes Ergebnis von einem Planer ein Spiel gestaltet, das die erwünschten Ergebnispaare als Gleichgewicht ergibt und dessen Regeln von den Spieler angenommen werden. Der Planer kann somit keinen Einfluss auf die Präferenzen oder Aktionen der Spieler nehmen.[24] Anders formuliert bedeutet dies, dass die Regeln so gewählt werden müssen, dass das Ergebnis des Spiels – das bei nicht-kooperativen Spielen und somit auch im Falle eines im Rahmen des Mechanismus-Designs gestalteten Spiels immer ein Nash-Gleichgewicht darstellt – dem gewünschten Verhalten entspricht. Hinter einem der bekanntesten, wenn nicht dem bekanntesten Spiel der Spieltheorie, dem Gefangenendilemma, steckt im Grunde nichts anderes als ein solches Mechanismus-Design. Ein Kommissar, der Planer des Spiels, bestimmt die Verhörmethoden so, dass sich die beiden Verdächtigen verraten; das gegenseitige Verraten stellt somit ein Nash-Gleichgewicht dar. Hinter dem von außen wahrgenommenen Versagen der beiden Verdächtigen, die nicht kooperieren können, verbirgt sich durch die vom Planer festgelegten Regeln ein eben solcher Mechanismus, der die Verdächtigen dazu bringen soll, sich gegenseitig zu verraten.[25]

2.2 Matching

Unter dem Begriff *Matching* werden in der Spieltheorie Zuordnungs- und Allokationsprobleme behandelt, die sich auf *zweiseitige* Märkte beziehen und deshalb auch als „*two-sided* market games“, „assignment games“ oder „matching games“ bezeichnet werden. D.h. es wird die Fragestellung behandelt, wie sich eine eindeutige Zuordnung von zwei Spielern finden lässt, die jeweils der anderen Seite des Marktes angehören.[26] Als zweiseitig gelten diese Märkte, da die Spieler, häufig auch Agenten genannt[27], aus zwei endlichen, disjunkten Mengen stammen, beispielsweise aus den Mengen Frauen und Männer, Firmen und Arbeitnehmer oder Universitäten und Studenten.[28] Warenmärkte gehören somit nicht zu diesen disjunkten Märkten, da ein Spieler sowohl als

[21] Vgl. Krishna und Perry (1998), S. 1; vgl. weiter Committee (2007), S. 2.
[22] Vgl. Myerson (1981), S. 58; vgl. weiter Krishna und Perry (1998), S. 2.
[23] Vgl. Krishna und Perry (1998), S. 2.
[24] Vgl. Osborne und Rubinstein (1994), S. 177.
[25] Vgl. Rieck (2009).
[26] Vgl. Knörzer (2009), S. 6; vgl. weiter Jin (2005), S. 2.
[27] Vgl. Roth (1982), S. 617.
[28] Vgl. Roth (1984b), S. 383; vgl. weiter Jin (2005), S. 2; vgl. weiter Gale und Shapley (1962), S. 9; vgl. weiter Sönmez (1997), S. 197.

Käufer als auch Verkäufer ein und desselben Gutes auftreten kann.[29]

Bei den zweiseitigen Marktspielen werden diskrete und kontinuierliche Märkte unterschieden, wobei sich diskret und kontinuierlich auf die Ausprägung der Variablen bezieht.[30] Als wahrscheinlich einfachstes Beispiel für einen zweiseitigen diskreten Markt, *„two-sided discrete market"*, kann das Hochzeitsproblem, *„marriage problem"*, aufgeführt werden, auf welches in Abschnitt 3 genauer eingegangen wird.[31]

Bei den hier betrachteten Modellen haben beide Seiten eine Präferenzordnung über die Menge der jeweils anderen Seite.[32] Je nach Modell wird hierbei unterschieden, ob beispielsweise ordinale oder kardinale Präferenzniveaus zulässig sind und ob Indifferenzen in den Präferenzlisten auftreten dürfen.[33] Grundsätzlich kann die Problemstellung dabei entweder hinsichtlich einer der beiden Präferenzlisten optimiert werden, oder aber es werden die Interessen beider Seiten bei der Zuordnung gleichermaßen berücksichtigt, so dass es zur Ausnutzung privater Informationen in Form der wahren Präferenzen durch die Angabe einer falschen Präferenzordnung kommen kann, um so aus Sicht des Spielers eine Verbesserung bei der Zuordnung zu erzielen.[34]

Allgemein lässt sich die umkehrbar eindeutige Zuordnung zweier Spieler disjunkter Mengen durch ein solches Spiel darstellen als eine Funktion z von $\underline{R}$ zu $\underline{Q}$:

$$z : \underline{R} \cup \underline{Q} \rightarrow \underline{R} \cup \underline{Q} \cup \{\cancel{e}\} \text{ mit } z(r) = q \text{ dann und nur dann wenn } z(q) = r$$

Wobei $r = 1, 2, \ldots, R$ die einzelnen Agenten der einen Seite und $q = 1, 2, \ldots, Q$ die einzelnen Agenten der anderen Seite darstellen, die jeweils eine vollständige Präferenzordnung über die Menge der Agenten der anderen Seite haben, zuzüglich der Alternative nicht zugeordnet zu werden $\{\cancel{e}\}$.[35]

3 Das Hochzeitsproblem

3.1 Modelldarstellung

Das wie bereits erwähnt wahrscheinlich einfachste Beispiel für einen zweiseitigen diskreten Markt ist das von David Gale und Lloyd Shapley 1962 vorgestellte Hochzeitsproblem, welches zwei disjunkte Mengen von Agenten umfasst, Männer ($M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$) und Frauen ($W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$).[36] Die Präferenzen liegen auf beiden Seiten lediglich auf ordinalen Niveaus vor, so dass das Hochzeitsproblem vom klassischen

[29] Vgl. Jin (2005), S. 2.
[30] Vgl. Jin (2005), S. 2 f, S. 13 und S. 19.
[31] Vgl. Roth (1984b), S. 383.
[32] Vgl. Roth (1982), S. 617; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 6; vgl. weiter Gale und Shapley (1962), S. 9.
[33] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 9.
[34] Vgl. ähnlich bei Knörzer (2009), S. 1 f.
[35] Vgl. Knörzer (2009), S. 5 f.
[36] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 11; vgl. weiter Roth (1984b), S. 383; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 6; vgl. weiter Roth (1985), S. 278.

Zuordnungsproblem abweicht.[37] Zur Vereinfachung wird dabei im ursprünglichen Modell angenommen, dass die beiden disjunkten Mengen die gleiche Größe haben, dass keine Indifferenzen auftreten, d.h. die Agenten haben strikte Präferenzen[38], und dass es für jeden Agenten vorzuziehen ist, einem Agenten der anderen Menge zugeordnet zu sein, statt gar nicht zugeordnet zu sein.[39] Letztere Annahme wurde in späteren Diskussionen jedoch häufig nicht mehr gefordert, so dass Agenten als inakzeptabel angegeben werden können.

Im Sinne des Hochzeitsproblems bedeutet dies im klassischen Modell, dass n Männer und n Frauen jeweils das andere Geschlecht entsprechend ihrer Präferenzen in Bezug auf einen zukünftigen Ehegatten klassifizieren, um hieraus eine zufriedenstellende Lösung zu finden, bei der alle Teilnehmer verheiratet werden.[40] Dabei kennzeichne $w_j P(m) w_k$, dass Agent m die Agentin w_j gegenüber der Agentin w_k präferiert, und $w_j R(m) w_k$, dass er entweder w_j vor w_k präferiert oder indifferent ist, was aufgrund strikter Präferenzen jedoch nur bei $j = k$ möglich ist. Entsprechende Notation gilt für die Präferenzen der Frauen. $P = (P(m_1), \ldots, P(m_n), P(w_1), \ldots, P(w_p))$ kennzeichne darüber hinaus den Vektor der Präferenzordnung jedes Agenten. Die Präferenzen der Agenten über alternative Zuordnungen x und y entsprechen ihren Präferenzen über ihre potentiellen Partner; d.h. jeder Mann präferiert x gegenüber y dann und nur dann, wenn er $x(m)$ gegenüber $y(m)$ präferiert.[41] Das Resultat eines solchen Marktes ist die Paarbildung von Agenten, welche durch eine umkehrbare Funktion x von M zu W im oben skizzierten Sinne der allgemeinen Funktion repräsentiert wird, so dass für einen beliebigen m aus M und w aus W gilt: $x(m) = w$ dann und nur dann, wenn $x(w) = m$.[42]

3.2 Stabilität

Grundlegend für das Modell ist die Forderung nach einer stabilen Zuordnung.[43] Eine Zuordnung x gilt dann als instabil, wenn ein Agent m_i aus M und eine Agentin w_j aus W existieren, die nicht miteinander verheiratet sind (d.h. $w_j \neq x(m_i)$), sich jedoch gegenüber ihren in x zugeordneten Partnern präferieren, d.h. $w_j P(m_i)\, x(m_i)$ und $m_i P(w_j)\, x(w_j)$. Eine Zuordnung x gilt als stabil, wenn sie gemäß dieser Definition nicht instabil ist.[44] Die Menge der stabilen Zuordnungen in Bezug auf einen Vektor P von Präferenzordnungen wird mit $C(P)$ bezeichnet. Die Menge der erreichbaren Paarungen eines beliebigen Mannes sei die Menge der bei einer stabilen Zuordnung erreichten Paarungen $A_m(P) = \{x(m) | x \in C(P)\}$; analoges gilt für die Menge der Frauen.[45]

[37] Vgl. Knörzer (2009), S. 6.
[38] Vgl. Roth (1985), S. 278.
[39] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 9, S. 11; vgl. weiter Roth (1984b), S. 383.
[40] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 11.
[41] Vgl. Roth (1985), S. 278.
[42] Vgl. Roth (1984b), S. 383; vgl. weiter Roth (1985), S. 278.
[43] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 11; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 6.
[44] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 11, vgl. weiter Roth (1984b), S. 383; vgl. weiter Roth (1985), S. 278.
[45] Vgl. Roth (1985), S. 279.

3.3 Optimalität

Große Bedeutung kommt nach der Bestimmung möglicherweise vieler stabiler Zuordnungen der Findung einer optimalen Zuordnung zu. Denn selbst wenn stabile Zuordnungen existieren, ist noch nicht sichergestellt, dass es auch eine optimale Zuordnung gibt.[46] Eine stabile Zuordnung ist dann aus Sicht der Männer (M-optimal) bzw. Frauen (W-optimal) optimal, wenn jeder Mann bzw. jede Frau unter ihr mindestens genauso gut gestellt ist wie unter irgendeiner anderen stabilen Zuordnung.[47] Wie es zu einer M-optimalen bzw. W-optimalen Zuordnung – kein Mann bzw. keine Frau ist unter einer anderen stabilen Zuordnung besser gestellt als unter der M- bzw. W-optimalen stabilen Zuordnung[48] – kommt, wird im weiteren Verlauf erläutert.

3.4 Beispiel

Die Präferenzen von je drei Frauen und Männern seien gegeben durch folgende Vektoren der Präferenzordnungen:

$$\begin{aligned} P(m_1) &= w_1, w_2, w_3 \quad & P(w_1) &= m_2, m_3, m_1 \\ P(m_2) &= w_2, w_3, w_1 \quad & P(w_2) &= m_3, m_1, m_2 \\ P(m_3) &= w_3, w_1, w_2 \quad & P(w_3) &= m_1, m_2, m_3 \end{aligned}$$

Dies lässt sich auch in einer Matrix wiedergeben, welche die Rangordnungen entsprechend ausweist:

	w_1	w_2	w_3
m_1	$1,3$	$2,2$	$3,1$
m_2	$3,1$	$1,3$	$2,2$
m_3	$2,2$	$3,1$	$1,3$

Tabelle 1: Präferenzmatrix im Hochzeitsproblem

Die erste Zahl in der Matrix gibt dabei die Rangfolge der Frauen durch die Männer und die zweite Nummer die Rangfolge der Männer durch die Frauen an. In diesem Fall präferiert m_1 somit w_1 vor w_2 vor w_3, während w_1 jedoch m_2 vor m_3 vor m_1 vorzieht.[49] Die Präferenzen sind somit strikt und individuell rational, d.h. kein Agent zieht es vor, unverheiratet zu bleiben.[50]

Insgesamt sind die folgenden neun geordneten Paare grundsätzlich möglich:[51]

$$M \times W = \{(m_1; w_1), (m_1; w_2), (m_1; w_3), (m_2; w_1), (m_2; w_2), (m_2; w_3), (m_3; w_1), (m_3; w_2), (m_3; w_3)\}$$

[46] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 10.
[47] Vgl. Roth (1984b), S. 384; vgl. weiter Gale und Shapley (1962), S. 10, S. 13.
[48] Vgl. Roth (1984b), S. 384; vgl. weiter Roth (2008), S. 540.
[49] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 11; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 7, vgl. weiter Jin (2005), S. 15.
[50] Vgl. Roth (1985), S. 278.
[51] Vgl. Knörzer (2009), S. 7.

Aus diesen lassen sich sechs mögliche Mengen von Hochzeiten ableiten:[52]

$$\begin{aligned}
X_1 &= \{(m_1; w_1), (m_2; w_2), (m_3; w_3)\} \\
X_2 &= \{(m_1; w_1), (m_2; w_3), (m_3; w_2)\} \\
X_3 &= \{(m_1; w_2), (m_2; w_1), (m_3; w_3)\} \\
X_4 &= \{(m_1; w_2), (m_2; w_3), (m_3; w_1)\} \\
X_5 &= \{(m_1; w_3), (m_2; w_1), (m_3; w_2)\} \\
X_6 &= \{(m_1; w_3), (m_2; w_2), (m_3; w_1)\}
\end{aligned}$$

Von diesen sechs möglichen Mengen von Hochzeiten sind lediglich drei Zuordnungen stabil - X_1, X_4, X_5. Bei X_1 erhält jeder Mann seine erste Wahl und jede Frau nur ihre letzte Wahl, dennoch ist diese Zuordnung stabil im Sinne der oben gegebenen Definition. Bei der stabilen Zuordnung X_5 erhält hingegen jede Frau ihre erste Wahl und jeder Mann seine letzte Wahl. Die stabile Zuordnung X_4 hingegen stellt einen Mittelweg dar, bei dem jeder Agent, egal ob Mann oder Frau, seine zweite Wahl erhält.[53] Es ist leicht ersichtlich, dass die anderen Zuordnungen nicht stabil sind. Im Falle von X_2 beispielsweise, bei der m_3 mit w_2 und w_1 mit m_1 lediglich seine bzw. ihre dritte und somit letzte Wahl erhalten, präferieren sich m_3 und w_1 gegenüber ihren in X_2 zugeordneten Partnern w_2 und m_1.

Ein möglicher Algorithmus, die *„deferred acceptance procedure“*, der zu einer stabilen Zuordnung führt, wird im folgenden Abschnitt erläutert.

3.5 Algorithmus

Bei der Fragestellung, ob immer eine stabile Zuordnung existiert, führten Gale und Shapley in ihrem 1962 veröffentlichten Artikel *„College Admissions and the Stability of Marriage“* einen als *„deferred acceptance procedure“* bekannten Algorithmus ein[54], mit dessen Hilfe stabile Zuordnungen gefunden werden sollten. Gleichzeitig stellten sie dabei fest, dass für ein solches Zuordnungsspiel wie das Hochzeitsproblem stets mindestens eine stabile Zuordnung als Lösung existiert, so dass es kein Paar gibt, das lieber miteinander verheiratet wäre als mit dem im Matching zugeordneten Partner.[55]

Der Algorithmus nach Gale und Shapley (1962) basiert auf einer iterativen Prozedur.

Schritt 1:

1. Jeder Mann $m_i \in M$ macht seiner favorisierten Frau $w_j \in W$ einen Heiratsantrag.

[52] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 11; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 7.
[53] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 11.
[54] Ihnen war zu diesem Zeitpunkt nicht bekannt, dass das National Resident Matching Program (NRMP), damals noch National Intern Matching Program (NIMP) genannt, einen entsprechenden Algorithmus bereits seit 1950 in den USA einsetzte, um angehende Ärzte und Krankenhäuser zuzuordnen, wie Roth (1984a), S. 1013, zeigt.
[55] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 12 f.

2. Jede Frau w_j, die mehr als einen Heiratsantrag erhält, lehnt alle Heiratsanträge außer den von dem unter diesen am meisten favorisierten Mann ab. Der unter den Antragsstellern favorisierte Mann wird von der Frau jedoch noch nicht akzeptiert, sondern auf ihre „Warteliste“ gesetzt, um abzuwarten, ob im Folgenden ein bevorzugter Mann ebenfalls einen Antrag macht.

Schritt k:

1. Jeder Mann m_i, der im vorherigen Schritt abgelehnt wurde, macht der am meisten favorisierten Frau w_j, der er noch keinen Antrag gemacht hat, einen Heiratsantrag.

2. Jede Frau w_j setzt den unter allen Antragsstellern (inklusive einem eventuell auf der Warteliste befindlichen Mann aus Schritt k-1) favorisierten Mann m_i auf ihre Warteliste und lehnt alle anderen Männer ab.

3. Zurück zu *Schritt k*, bis kein Mann mehr abgelehnt wird.

Sobald kein Mann mehr abgelehnt wird, bricht der Algorithmus ab und jeder Mann m_i wird mit der Frau w_j verheiratet, auf deren Warteliste er sich befindet.[56] Solange eine Frau keinen Antrag erhalten hat, wird der Algorithmus demnach aufgrund der anfänglich gemachten Bedingungen immer wieder Ablehnungen und neue Anträge hervorbringen und sicherstellen, dass im Laufe der Zeit jeder Frau ein Antrag gemacht wird.[57] Darüber hinaus ist sichergestellt, dass der Algorithmus terminiert, da ein Mann keiner Frau ein zweites Mal einen Antrag machen wird.[58] Die resultierende Zuordnung ist stabil, da jeder Mann m_i, der eine Frau w_k gegenüber seiner zugeordneten Partnerin präferiert, w_k bereits einen Antrag gemacht haben und von w_k im Laufe des Algorithmus abgelehnt worden sein muss, da diese einen anderen antragenden Mann bevorzugt hat.[59] Darüber hinaus ist die so gefundene Zuordnung die M-optimale Zuordnung, die jeder Mann mindestens so hoch schätzt wie jede andere stabile Zuordnung[60], da jeder Mann seiner am meisten präferierten, möglichen Partnerin zugeordnet wird. Eine entsprechend symmetrische Prozedur, bei der die Frauen den Männern Anträge machen, führt erwartungsgemäß zur W-optimalen Zuordnung. Die Zuordnung wird in beiden Fällen nur dann identisch sein, wenn lediglich eine einzige stabile Zuordnung existiert.[61]

Darüber hinaus haben Gale und Shapley (1962) gezeigt, dass die Bedingung gleich großer Mengen für Frauen und Männer beim vorgestellten Algorithmus entbehrlich ist. Bei i Männern und j Frauen mit $i < j$ terminiert der Algorithmus, wenn i Frauen ein Antrag gemacht wurde. Wenn $i > j$ gilt, terminiert der Algorithmus, wenn jeder Mann entweder auf der Warteliste einer Frau steht oder von allen Frauen abgelehnt wurde. In beiden Fällen ist die gefundene Zuordnung ebenfalls stabil.[62]

[56] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 12; vgl. weiter Roth (1984b), S. 384 f.
[57] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 12.
[58] Vgl. Roth (2008), S. 540.
[59] Vgl. Roth (1984b), S. 385; vgl. weiter Roth (2008), S. 540.
[60] Vgl. Roth (2008), S. 540.
[61] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 13.
[62] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 13.

Anhand eines Beispiels wird die Vorgehensweise des Algorithmus noch einmal ausführlich erläutert, wobei die Männer den Frauen die Anträge machen, so dass eine M-optimale, stabile Zuordnung gefunden wird. Die Präferenzen von vier Frauen und fünf Männern seien gegeben durch folgende Vektoren der Präferenzordnungen:[63]

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_3, w_1, w_4, w_2 & P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_5, m_4 \\ P(m_2) = w_2, w_3, w_4, w_1 & P(w_2) = m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \\ P(m_3) = w_1, w_2, w_3, w_4 & P(w_3) = m_5, m_3, m_1, m_2, m_4 \\ P(m_4) = w_4, w_3, w_2, w_1 & P(w_4) = m_3, m_5, m_4, m_2, m_1 \\ P(m_5) = w_2, w_4, w_1, w_3 & \end{array}$$

Erster Schritt:

1.) Von den Männern werden folgende Heiratsanträge gestellt:

- m_1 macht w_3 einen Antrag;
- m_2 und m_5 machen w_2 einen Antrag;
- m_3 macht w_1 einen Antrag;
- m_4 macht w_4 einen Antrag.

2.) Von den Frauen werden folgende Ablehnungen und Wartelisten vorgenommen:

- w_1 setzt m_3 auf die Warteliste;
- w_2 lehnt m_5 ab und setzt m_2 auf die Warteliste;
- w_3 setzt m_1 auf die Warteliste;
- w_4 setzt m_4 auf die Warteliste.

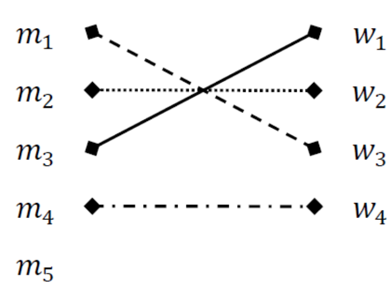

Abbildung 1: Zuordnungen nach dem ersten Schritt

[63] Ähnlich bei Jin (2005), S. 16.

Zweiter Schritt:

1.) Im vorherigen Schritt abgelehnte Männer machen ihrer nächsten Wahl einen Antrag:

- m_5 macht w_4 einen Antrag

2.) Von den Frauen werden folgende Ablehnungen und Wartelisten vorgenommen:

- w_4 lehnt m_4 ab und setzt m_5 auf die Warteliste.

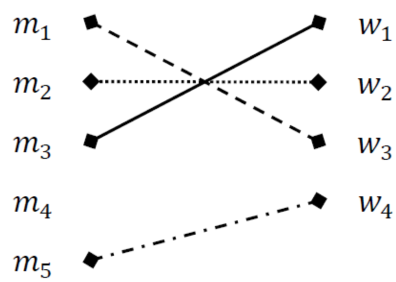

Abbildung 2: Zuordnungen nach dem zweiten Schritt

Dritter Schritt:

1.) Im vorherigen Schritt abgelehnte Männer machen ihrer nächsten Wahl einen Antrag:

- m_4 macht w_3 einen Antrag.

2.) Von den Frauen werden folgende Ablehnungen und Wartelisten vorgenommen:

- w_3 lehnt m_4 ab und behält m_1 auf der Warteliste.

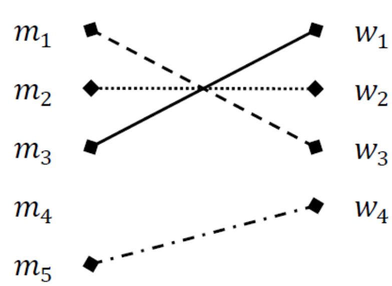

Abbildung 3: Zuordnungen nach dem dritten Schritt

Vierter Schritt:

1.) Im vorherigen Schritt abgelehnte Männer machen ihrer nächsten Wahl einen Antrag:

- m_4 macht w_2 einen Antrag.

2.) Von den Frauen werden folgende Ablehnungen und Wartelisten vorgenommen:

- w_2 lehnt m_4 ab und behält m_2 auf der Warteliste.

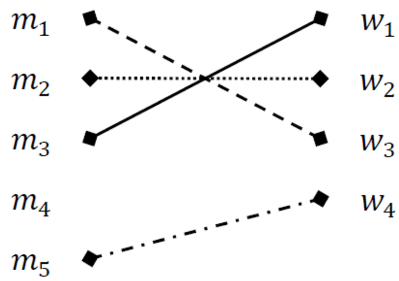

Abbildung 4: Zuordnungen nach dem vierten Schritt

Fünfter Schritt:

1.) Im vorherigen Schritt abgelehnte Männer machen ihrer nächsten Wahl einen Antrag:

- m_4 macht w_1 einen Antrag.

2.) Von den Frauen werden folgende Ablehnungen und Wartelisten vorgenommen:

- w_1 lehnt m_4 ab und behält m_3 auf der Warteliste.

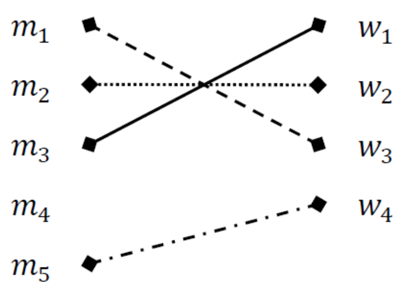

Abbildung 5: Zuordnungen nach dem fünften Schritt

An dieser Stelle terminiert der Algorithmus, wie zuvor definiert, da m_4 von allen Frauen abgelehnt wurde und alle anderen Männer sich auf einer Warteliste befinden. Die gefundene, stabile, M-optimale Zuordnung lautet somit:

$$X_1 = \{(m_1; w_3), (m_2; w_2), (m_3; w_1), (m_4; \cancel{e}), (m_5; w_4)\}$$

wobei ɇ gemäß der in Abschnitt 2.2 gemachten, allgemeinen Definition und aufgrund der im Beispiel nicht berücksichtigten Bedingung gleich großer Mengen der hier notwendigen Alternative „nicht zugeordnet zu sein“ entspricht.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, ob die gefundene, M-optimale Zuordnung in diesem besonderen Fall unterschiedlich großer Mengen auch der W-optimalen Zuordnung entspricht und es sich somit bei der stabilen Zuordnung um die einzig stabile Zuordnung handelt. Um dies zu überprüfen, wird obiges Beispiel unter identischen Präferenzlisten, die zur besseren Übersicht erneut aufgeführt werden, noch einmal im symmetrischen Sinne durchgeführt.

$$
\begin{array}{ll}
P(m_1) = w_3, w_1, w_4, w_2 & P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_5, m_4 \\
P(m_2) = w_2, w_3, w_4, w_1 & P(w_2) = m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \\
P(m_3) = w_1, w_2, w_3, w_4 & P(w_3) = m_5, m_3, m_1, m_2, m_4 \\
P(m_4) = w_4, w_3, w_2, w_1 & P(w_4) = m_3, m_5, m_4, m_2, m_1 \\
P(m_5) = w_2, w_4, w_1, w_3 &
\end{array}
$$

Erster Schritt:

1.) Von den Frauen werden folgende Heiratsanträge gestellt:

- w_1 macht m_2 einen Antrag;
- w_2 macht m_1 einen Antrag;
- w_3 macht m_5 einen Antrag;
- w_4 macht m_3 einen Antrag.

2.) Von den Männern werden folgende Ablehnungen und Wartelisten vorgenommen:

- m_1 setzt w_2 auf die Warteliste;
- m_2 setzt w_1 auf die Warteliste;
- m_3 setzt w_4 auf die Warteliste;
- m_5 setzt w_3 auf die Warteliste.

In diesem Fall terminiert der Algorithmus, wie zuvor bereits definiert, bereits nach vier Heiratsanträgen und somit nach dem ersten Schritt, da die Frauen in der Unterzahl sind und es aufgrund der Präferenzlisten zu keinerlei Ablehnungen seitens der Männer kommt. Die so gefundene, stabile, dieses Mal jedoch W-optimale Zuordnung ist nicht identisch mit der zuvor ermittelten M-optimalen Zuordnung, so dass diese nicht die einzige stabile Zuordnung darstellte. Die W-optimale Zuordnung für obiges Beispiel lautet:

$$X_2 = \{(m_1; w_2), (m_2; w_1), (m_3; w_4), (m_4; \text{ɇ}), (m_5; w_3)\}$$

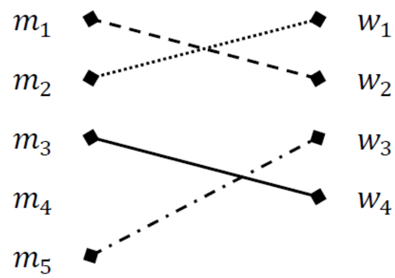

Abbildung 6: Zuordnungen nach dem ersten Schritt

Die Frauen erhalten bei der W-optimalen Zuordnung ihre ersten Präferenzen. Wie bei der M-optimalen Zuordnung bleibt auch bei der W-optimalen Zuordnung m_4 unverheiratet.

Aus diesem Algorithmus folgern einige Ergebnisse, die sich auch schon im obigen Beispiel andeuten und die im folgenden Abschnitt in Form von Theoremen festgehalten werden.

3.6 Theoreme

Theorem 1:

Für jedes Zuordnungsspiel im Sinne des Hochzeitsproblems existiert mindestens eine stabile Zuordnung. D.h. die Menge $C(P)$ von stabilen Zuordnungen in Bezug auf einen beliebigen Vektor $P = (P(m_1), \ldots, P(m_n), P(w_1), \ldots, P(w_p))$ von Präferenzordnungen ist nichtleer.[64]

Theorem 1a:

Die Menge der stabilen Zuordnungen konstituiert den Kern des Spiels.[65]

Als Kern wird in einem kooperativen N-Personen-Spiel die „Menge aller pareto-optimalen, durch keine Koalition dominierten Ergebnisse definiert“[66].

Theorem 2:

Die Menge $C(P)$ von stabilen Zuordnungen im Hochzeitsproblem enthält für strikte Präferenzen eine M-optimale Zuordnung x^* mit der Eigenschaft, dass für jeden Mann m aus M $x^*(m)$ die am meisten präferierte, erreichbare Zuordnung ist. Bezugnehmend auf die Definition in Abschnitt 3.1 bedeutet dies: $x^*(m)\,R(m)\,x(m)$ für jede andere stabile Zuordnung x. Sie enthält zudem eine W-optimale Zuordnung y^* für die $y^*(w)\,R(w)\,y(w)$ für jede Frau w aus W und jede andere stabile Zuordnung y gilt.[67]

[64] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 12 f; vgl. weiter Roth (2008), S. 540; Roth (1985), S. 279.
[65] Vgl. Roth (1985), S. 278; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 9; vgl. weiter Roth (1984b), S. 383.
[66] Knörzer (2009), S. 9.
[67] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 14; vgl. weiter Roth (1985), S. 279; vgl. weiter Roth (2008), S. 540 f.

Theorem 2a:

Die M-optimale, stabile Zuordnung aus Sicht der Männer ist bei strikten Präferenzen zugleich die schlechteste stabile Zuordnung aus Sicht der Frauen. Die W-optimale, stabile Zuordnung aus Sicht der Frauen ist zugleich die schlechteste stabile Zuordnung aus Sicht der Männer (Lattice theorem).[68]

Theorem 3:

Die M- und W-optimalen Zuordnungen sind nur dann identisch, wenn lediglich eine einzige stabile Zuordnung existiert.[69]

Theorem 4:

Auch bei ungleich großen Mengen M und W existiert im Hochzeitsproblem eine stabile Zuordnung.[70]

Theorem 5:

Die bei ungleich großen Mengen nicht zugeordneten Agenten sind bei jeder stabilen Zuordnung identisch.[71]

Theorem 6:

Im Hochzeitsproblem existiert weder eine stabile noch eine instabile Zuordnung z, die jeder Mann der M-optimalen, stabilen Zuordnung x^* vorzieht. D.h. für keine beliebige Zuordnung z gilt $z\,(m)\,P\,(m)\,x^*(m)$ für alle $m \in M$. Die M-optimale Zuordnung ist für die Männer somit schwach pareto-optimal in der Menge aller Zuordnungen. Symmetrisches gilt für die W-optimale Zuordnung.[72]

Es hat sich jedoch gezeigt, dass, selbst wenn keine stabile oder instabile Zuordnung existiert, die von allen Männern bevorzugt wird, zumindest instabile Zuordnungen existieren können, die von allen Männern mindestens gleich gut bewertet werden wie die M-optimale Zuordnung x^* und von einigen Männern präferiert werden. Theorem 8 kann nicht auf strikte Pareto-Optimalität erweitert werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

[68] Vgl. Roth (1985), S. 279; vgl. weiter Roth (2008), S. 542; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 10.
[69] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 13.
[70] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 13.
[71] Vgl. Roth und Sotomayor (1990), S. 42; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 9 und Roth (2008), S. 542.
[72] Vgl. Roth (1985), S. 279; vgl. weiter Roth (2008), S. 542.

Mengen:

$$M = \{m_1, m_2, m_3\} \text{ und } W = \{w_1, w_2, w_3\}$$

Präferenzlisten:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_2, w_1, w_3 & P(w_1) = m_1, m_2, m_3 \\ P(m_2) = w_1, w_2, w_3 & P(w_2) = m_3, m_1, m_2 \\ P(m_3) = w_1, w_2, w_3 & P(w_3) = m_1, m_2, m_3 \end{array}$$

Die M-optimale Zuordnung x^* ist gegeben durch:

$$x^* = \{(m_1; w_1), (m_2; w_3), (m_3; w_2)\}$$

Bei dieser Zuordnung erhält sowohl m_1 als auch m_3 seine zweite Wahl, m_2 erhält mit w_3 jedoch nur seine dritte und somit letzte Wahl. Bei der instabilen Zuordnung $z = \{(m_1; w_2), (m_2; w_3), (m_3; w_1)\}$ erhalten m_1 und m_3 hingegen jeweils ihre erste Wahl, so dass beide strikt besser gestellt sind als bei der M-optimalen Zuordnung x^*, und m_2 ist nicht schlechter gestellt.[73]

4 Das „college admissions problem"

Das Hochzeitsproblem stellt einen Spezialfall des *„college admissions problem"* dar.[74] Im Folgenden wird zum weiteren Verständnis kurz auf die Definition dieses allgemeineren Modells eingegangen.

4.1 Modelldarstellung

Wie beim Hochzeitsproblem bestehen die Agenten im *„college admissions problem"* aus zwei disjunkten Mengen $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, die Menge der Universitäten, und $S = \{s_1, \ldots, s_p\}$, die Menge der Studenten. Anders als beim Hochzeitsproblem sucht beim *„college admissions problem"* nicht jeder Agent eine Zuordnung zu genau einem Agenten der anderen Menge, sondern mehrere Studenten können einer Universität zugeordnet werden.[75] Es handelt sich somit um eine so genannte *„many-to-one"*-Zuordnung.[76] Jede Universität c_i hat jedoch nur eine beschränkte Anzahl an Studienplätzen und kann so nur einen Teil der Studenten aufnehmen, was durch ihre Quote q_i gekennzeichnet ist.[77] Äquivalent sind die beiden Modelle, wenn $q_i = 1$ für jedes c_i aus C gilt, so dass jeder Universität genau ein Student und jeder Student genau einer Universität zugeordnet wird.[78] Wie beim Hochzeitsproblem hat auch beim *„college admissions problem"* jeder

[73] Vgl. Roth (2008), S. 542 f.
[74] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 11; vgl. weiter Roth (1985), S. 277, S. 281.
[75] Vgl. Roth (1985), S. 277.
[76] Vgl. Roth (2008), S. 545.
[77] Vgl. Roth (1985), S. 280; vgl. weiter Gale und Shapley (1962), S. 9.
[78] Vgl. Roth (1985), S. 281.

Student s strikte Präferenzen $P(s)$ über die Menge $C \cup \{\cancel{e}\}$ und jede Universität c strikte Präferenzen $P(c)$ über die Menge $S \cup \{\cancel{e}\}$. Eine Zuordnung im „college admissions problem“ ist definiert als die Beziehung $x : C \cup S \rightarrow C \cup S \cup \{\cancel{e}\}$ mit $|x(s)| = 1$ für alle s aus S und $|x(c_i)| = q_i$ für alle c_i aus C und für jedes c aus C und s aus S ist $x(s) = c$ dann und nur dann, wenn $s \in x(c)$.[79] Durch diese Definition wird sichergestellt, dass keiner Universität mehr Studenten zugeordnet werden als Studienplätze verfügbar sind und dass kein Student mehr als einer Universität zugeordnet wird. Die im Abschnitt 3.1, 3.2 und 3.3 getroffenen Definitionen bezüglich der Präferenzen, Stabilität und Optimalität einer Zuordnung gelten entsprechend auch für das *„college admission problem“*[80] Gale und Shapley (1962) gingen davon aus, dass sich die Ergebnisse und der Algorithmus des Hochzeitsproblems problemlos auf das *„college admissions problem“* übertragen lassen[81], dies ist jedoch nicht immer problemlos der Fall, wie sich auch im folgenden Kapitel zeigen wird.[82]

Vor allem in der Praxis von Bedeutung und beispielsweise auch in Deutschland von Relevanz ist der angepasste Fall, dass eine Universität nicht nur eine einzige Quote für alle Bewerber aufweist, sondern Kontingente für unterschiedliche Gruppen von Bewerbern bereithalten muss; beispielsweise für Studenten mit Wartesemestern.[83]

Eng verwandt mit dem *„college admissions problem“* ist das *„school choice problem“*, bei welchem die Universitäten keine Präferenzen über einzelne Studenten besitzen, sondern bei dem diejenigen Studenten, die die Universität höher wertschätzen, meist unabhängig von ihrer Qualifikation[84] vorgezogen werden. In diesem Fall sind lediglich die Studenten als Spieler anzusehen und es handelt sich um einen einseitigen Markt mit zentralem Clearinghaus.[85]

4.2 Übertragbarkeit der Theoreme des Hochzeitsproblems

Im Folgenden soll betrachtet werden, ob sich die im Abschnitt 3.6 für das Hochzeitsproblem aufgestellten Theoreme ebenfalls auf das *„college admissions problem“* übertragen lassen.

Theorem7:

> Die Theoreme 1, 2, 3, 4 und 5 können entsprechend auf das *„college admissions problem“* übertragen werden.[86]

[79] Vgl. Roth (1985), S. 280.
[80] Vgl. ausführlicher bei Roth (1985), S. 281.
[81] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 13 f.
[82] Vgl. Roth (1985); vgl. weiter Knörzer (2009), S. 15.
[83] Vgl. Braun, Dwenger et al. (2010), S. 30; vgl. weiter Abdulkadiroglu (2005), S. 12 ff.
[84] Vgl. Braun, Dwenger et al. (2010), S. 7.
[85] Vgl. Braun, Dwenger et al. (2010), S. 5 und Abdulkadiroglu und Sönmez (2003), Abdulkadiroglu, Pathak et al. (2005) sowie Ergin und Sönmez (2006) für eine Abgrenzung beider Probleme, worauf in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden soll.
[86] Für Theorem 1, 2, 3 und 4 vgl. Gale und Shapley (1962), S. 13 f und Knörzer (2009), S. 12; für Theorem 1 und 2 vgl. weiter Roth (1985), S. 281; für Theorem 5 vgl. Knörzer (2009), S. 12.

Theorem 2 muss aufgrund der Quote der Universitäten jedoch wie folgt etwas abweichend formuliert werden:

> Die Menge $C(P)$ von stabilen Zuordnungen im *„college admissions problem"* enthält eine C-optimale, stabile Zuordnung x^* mit der Eigenschaft, dass für jede Universität c aus C mit Quote q, $x(c)$ die am meisten präferierten, erreichbaren Studenten enthält, falls die Anzahl k der für c erreichbaren Studenten mindestens q beträgt, oder anderenfalls alle von c erreichbaren Studenten enthält und $q-k$ Plätze unzugeordnet lässt. Die Menge $C(P)$ enthält zudem eine S-optimale Zuordnung y^* für die $y^*(s)\,R(s)\,y(s)$ für jeden Studenten s aus S und jede andere stabile Zuordnung y gilt.[87]

Für Theorem 5 gilt entsprechend folgende genauere Betrachtung:

> Bei strikten Präferenzen über Individuen und *responsive*[88] Präferenzen der Universitäten ist die Menge[89] der zugeordneten Studenten (Agenten) in jeder stabilen Zuordnung identisch, d.h. die nicht zugeordneten Agenten sind ebenfalls identisch. Darüber hinaus werden jeder Universität, die bei einer beliebigen stabilen Zuordnung freie Studienplätze aufweist, bei jeder stabilen Zuordnung exakt die gleichen Studenten zugeordnet.[90]

Theorem8:

> Theorem 6 des Hochzeitsproblems kann nicht auf das *„college admissions problem"* übertragen werden.[91]

Das *„college admissions problem"* ist für die Übertragung des Theorems 6 nicht ausreichend definiert, da die Universitäten, die anders als beim Hochzeitsproblem eine Quote größer Eins aufweisen können, in diesem Fall nicht nur Präferenzen über die Studenten selbst haben müssen, sondern auch Präferenzordnungen über die unterschiedlichen Mengen von Studenten, die ihnen zugeordnet werden können. Doch selbst eine entsprechende Anpassung der Definition des Modells führt nicht dazu, dass Theorem 6 übertragen werden kann, solange die Präferenzen über Mengen von Studenten *responsive* sind, d.h. dass die Präferenzen über die Mengen von Studenten mit den Präferenzen der Universitäten über einzelne Studenten in einer plausiblen Beziehung stehen. Eine Universität, die *responsive* Präferenzen aufweist, zieht von zwei Zuordnungen, die sich nur in einem Studenten unterscheiden, diejenige Zuordnung vor, die den höher geschätzten Studenten enthält. Im Sinne der bisher getroffenen Definitionen lässt sich *responsive* wie folgt definieren:

[87] Vgl. Roth (1985), S. 281.
[88] Für eine Erläuterung siehe die folgenden Ausführungen zu Theorem 8.
[89] Der Begriff „Menge" ist hier grundsätzlich im mathematischen Sinne und nicht etwa als Anzahl zu verstehen.
[90] Vgl. Roth (2008), S. 556.
[91] Vgl. Roth (1985), S. 282 und S. 283 f für einen Beweis.

$y\,(c)\,P^{\#}\,(c)\,x\,(c)\,|y(c) = x(c) \cup \{s_k\} \backslash \{\sigma\}, \sigma \in x\,(c)\,, s_k \notin x\,(c)$ und $s_k P\,(c)\,\sigma$, wobei $P^{\#}(c)$ die Präferenzordnung der Universität c über alle Zuordnungen $x(c)$ kennzeichne, die sie bei irgendeiner Zuordnung x des Modells erhalten könnte.[92] Studenten sind gemäß dieser Definition Substitute und keine Komplemente, d.h. es gibt keinen Studenten, der nur zusammen mit einem anderen Studenten begehrenswert ist.[93] Theorem 6 ist unter der Annahme von *responsive* Präferenzen somit nicht auf das *„college admissions problem“* übertragbar.[94] Ein Beweis dieser Aussage anhand eines widerlegenden Beispiels findet sich bei Roth (1985), S. 283 f.

Allerdings muss Theorem 6 nicht in vollem Umfang zurückgewiesen werden, so dass folgendes Theorem Gültigkeit besitzt:

Theorem 8*:

> Im *„college admissions problem“* existiert weder eine stabile noch eine instabile Zuordnung z, die jeder Student der S-optimalen, stabilen Zuordnung x^* vorzieht. D.h. für keine beliebige Zuordnung z gilt $z\,(s)\,P\,(s)\,x^*(s)$ für alle $s \in S$. Die S-optimale Zuordnung ist für die Studenten somit schwach pareto-optimal in der Menge aller Zuordnungen. Symmetrisches gilt jedoch wie gezeigt nicht für die C-optimale Zuordnung, sofern die Universitäten *repsonsive* Präferenzen aufweisen.[95]

Folglich können Zuordnungen existieren, die von allen Universitäten strikt gegenüber der C-optimalen Zuordnung präferiert werden.

5 Manipulation

Wie bereits in Abschnitt 2.2 erwähnt, kann es durch die Agenten zur Ausnutzung privater Informationen in Form der wahren Präferenzen durch die Angabe falscher Präferenzordnung kommen, um sich selbst besser zu stellen. Da die jeweiligen Präferenzen nur dem Agenten selbst bekannt sind, induziert jedes Zuordnungsverfahren, das eine Zuordnung als eine Funktion der angegebenen Präferenzen bedingt, ein nichtkooperatives Spiel mit asymmetrischer Information, in dem die Menge der Strategien eines Agenten aus allen möglichen Präferenzen besteht, die er angeben könnte.[96] Gale und Shapley (1962) haben, wie bereits erwähnt, gezeigt, dass die *„deferred acceptance procedure“* bei wahrer Präferenzangabe immer zu einer stabilen Zuordnung führt, beim Feld der Manipulationen muss der Algorithmus jedoch mit den tatsächlich gemachten, aus privater Information resultierenden Präferenzen umgehen.[97] Hieraus haben sich in der Literatur einige

[92] Vgl. Roth (1985), S. 281 ff.
[93] Vgl. Roth (2008), S. 547.
[94] Vgl. Roth (1985), S. 284.
[95] Vgl. Roth (1985), S. 287.
[96] Vgl. Roth (1984b), S. 384.
[97] Vgl. Zhou (1991), S. 25.

weitere Theoreme ergeben, die im nächsten Abschnittdiskutiert werden sollen – zunächst erneut aus Sicht des Hochzeitproblems.

5.1 Manipulation im Hochzeitsproblem

5.1.1 Manipulation anhand von Präferenzen

Im Mittelpunkt der Betrachtung steht die Frage, ob es ein stabiles Zuordnungsverfahren gibt, welches es für alle Agenten eine dominante Strategie macht, stets ihre wahren Präferenzen, definiert als P^*, preiszugeben.[98]

Theorem 9:

> Im Hochzeitsproblem existiert kein stabiles Zuordnungsverfahren, in dem das Preisgeben der wahren Präferenzen eine dominante Strategie für jeden Agenten ist (*Impossibility theorem*).[99]

Ein Beweis des *„Impossibility theorem"* ist nach Roth (2008) bereits mit dem einfachsten Beispiel möglich, in dem zwei Männern zwei Frauen zugeordnet werden:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_1, w_2 & P(w_1) = m_2, m_1 \\ P(m_2) = w_2, w_1 & P(w_2) = m_1, m_2 \end{array}$$

Die M-optimale Zuordnung x_m^* ist gegeben durch $x_m^* = \{(m_1; w_1), (m_2; w_2)\}$, die W-optimale Zuordnung durch $x_w^* = \{(m_1; w_2), (m_2; w_1)\}$. Da dies die einzigen beiden stabilen Zuordnungen sind, muss jedes stabile Zuordnungsverfahren für die gemachten Präferenzen P eine dieser beiden Zuordnungen liefern. Wenn beispielsweise w_1 ihre Präferenzen in der Form falsch angibt, dass m_1 inakzeptabel ist, d.h. $P'(w_1) = m_2$, jeder andere Agent jedoch seine wahren Präferenzen angibt, so dass $P' = [P(m_1), P(m_2), P'(w_1), P(w_2)]$, bleibt unabhängig vom konkreten Zuordnungsverfahren als einzig stabile Zuordnung x_w^*, so dass w_1, die nun in jedem Fall ihre erste statt eventuell zweite Wahl erhält, von ihrer Falschangabe profitiert. Auf diese Weise kann jeder, der nicht dem Partner unter seiner optimalen, stabilen Zuordnung zugeteilt wird, das Zuordnungsverfahren in seinem Sinne manipulieren.[100] Aus diesen Feststellungen folgt direkt das nächste Theorem.

Theorem 10:

> Im Hochzeitsproblem mit strikten Präferenzen und mehr als einer stabilen Zuordnung, kann mindestens ein Agent sich durch die Falschangabe seiner Präferenzen besserstellen, wenn alle anderen Agenten ihre wahren Präferenzen angeben.[101]

[98] Vgl. Roth (2008), S. 543.
[99] Vgl. Roth (1985), S. 280; vgl. weiter Roth (2008), S. 543; vgl. weiter Roth (1984b), S. 384.; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 14, Theorem 8B.
[100] Vgl. Roth (2008), S. 543 f.
[101] Vgl. Roth (2008), S. 544.; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 14, Theorem 8D.

Theorem 11:

> In jedem Zuordnungsverfahren, das im Hochzeitsproblem zur M-optimalen stabilen Zuordnung führt, ist die Angabe der wahren Präferenzen P^* für jeden $m \in M$ die beste Antwort auf die Präferenzordnungen der anderen Männer, gleich ob diese ihre wahren Präferenzen P^* oder unwahren Präferenzen P' angeben.[102]

Theorem 12:

> Die *„deferred acceptance procedure"*, die für beliebige Präferenzen P immer die M-optimale, stabile Zuordnung $x^*(P)$ liefert, macht es für jeden $m \in M$ eine schwach dominante Strategie seine wahren Präferenzen P^* anzugeben. Symmetrisches gilt für die W-optimale Zuordnung.[103]

Weitere Theoreme lassen sich aufstellen, wenn man für die *„deferred acceptance procedure"*, bei der die Männer den Frauen die Anträge machen, so dass eine M-optimale Zuordnung getroffen wird, die sich ergebenden Anreize auf Seiten der Frauen betrachtet (äquivalentes gilt aufgrund der Gleichheit beider Seiten des Marktes im symmetrischen Fall).

Theorem 13:

> Eine Frau $w_i \in W$ kann sich durch Falschangabe ihrer wahren Präferenzen $P^*(w_i)$ in Form von $P'(w_i)$ bei der *„deferred acceptance procedure"*, die die M-optimale stabile Zuordnung liefert, möglicherweise verbessern.[104]

Dass eine solche Verbesserung für eine Frau, die nicht ihre wahren Präferenzen angibt, sogar unabhängig vom gewählten Zuordnungsverfahren möglich ist, zeigte bereits der obige Beweis zu Theorem 9, der somit auch Theorem 13 für die konkrete *„deferred acceptance procedure"* mit M-optimaler Zuordnung bestätigt. Eine Frau kann selbst unter der M-optimalen Zuordnung ihren am höchsten eingestuften Mann erreichen, indem sie wie im Beispiel gezeigt sämtliche anderen Männer als inakzeptable angibt, was zugleich ihre optimale Manipulationsstrategie darstellt.[105] Auf diese Weise kann sie eine M-optimale Zuordnung in eine W-optimale Zuordnung umwandeln.[106] Schließt man im Modell die Möglichkeit aus, unzugeordnet zu bleiben bzw. Partner als inakzeptable anzugeben, kann diese konkrete Art der Manipulation jedoch eingeschränkt werden.[107]

---

[102] Vgl. Roth (1984b), S. 386; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 13.
[103] Vgl. Roth (1985), S. 280; vgl. weiter Roth (2008), S. 544; vgl. weiter Roth (1984b), S. 385; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 13.
[104] Vgl. Knörzer (2009), S. 14; vgl. weiter Roth (2008), S. 543 f.
[105] Vgl. Teo, Sethuraman et al. (2001), S. 430; vgl. weiter Gale und Sotomayor (1985).
[106] Vgl. Gale und Sotomayor (1985).
[107] Vgl. Teo, Sethuraman et al. (2001), S. 435 f.

Theorem 14:

> In jedem Zuordnungsverfahren, das im Hochzeitsproblem zur M-optimalen stabilen Zuordnung führt, ist die Angabe der wahren Präferenzen P^* für jede $w \in W$ nicht immer die beste Antwort auf die Präferenzordnungen der anderen Frauen, gleich ob diese ihre wahren Präferenzen P^* oder unwahren Präferenzen P' angeben.[108]

Aus Theorem 13 und 14 folgert somit, dass die Angabe der wahren Präferenzen in der *„deferred acceptance procedure"*, die die M-optimale Zuordnung liefert, nicht für jede Frau eine dominante Strategie ist.[109] Diese scheinbar generelle Feststellung wird von Theorem 15 nur für einen einzigen Fall umgekehrt.

Theorem 15:

> In einem Zuordnungsverfahren, das im Hochzeitsproblem zur M-optimalen stabilen Zuordnung führt, ist die Angabe der wahren Präferenzen P^* für alle $w \in W$ nur dann eine dominante Strategie, wenn nur eine einzige stabile Zuordnung existiert.[110]

Theorem 15 weist eine enge Beziehung zu Theorem 10 auf, welches gerade davon ausgeht, dass mehr als eine stabile Zuordnung existiert.

Theorem 16:

> In einem Zuordnungsverfahren, das im Hochzeitsproblem zur M-optimalen stabilen Zuordnung führt, ist die Angabe der falschen Präferenzen P', die den am meisten präferierten Mann nicht an erster Stelle ausweisen, für alle $w \in W$ eine dominierte Strategie.[111]

5.1.2 Manipulation durch vorzeitige bilaterale Vereinbarungen

Das folgende Theorem 17 kann zu einer eigenen Unterkategorie der Manipulation anhand von Präferenzen gezählt werden, der Manipulation anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen (*„pre-arranged matches"*).[112]

Theorem 17:

> Seien P^* die wahren, nicht zwingend strikten Präferenzen der Agenten und unterscheide sich P' von P^* so, dass eine Koalition A von Männern ihre Präferenzen falsch angibt, dann existiert keine stabile M-optimale Zuordnung x für P', die von allen Mitgliedern aus A gegenüber der stabilen M-optimalen Zuordnung y unter Angabe von P^* bevorzugt wird.[113]

[108] Vgl. Roth (1984b), S. 386; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 14.
[109] Vgl. Zhou (1991), S. 25.
[110] Vgl. Knörzer (2009), S. 14.
[111] Vgl. Knörzer (2009), S. 14.
[112] Vgl. Sönmez (1999), S. 152.
[113] Vgl. Roth (2008), S. 544; vgl. weiter Knörzer (2009), S. 13.

Beispiel:

Mengen:

$$M = \{m_1, m_2, m_3\} \text{ und } W = \{w_1, w_2, w_3\}$$

Präferenzlisten:

$$\begin{aligned} P(m_1) &= w_1, w_2, w_3 \quad & P(w_1) &= m_2, m_1, m_3 \\ P(m_2) &= w_2, w_1, w_3 \quad & P(w_2) &= m_1, m_3, m_2 \\ P(m_3) &= w_2, w_3, w_1 \quad & P(w_3) &= m_3, m_1, m_2 \end{aligned}$$

Die M-optimale Zuordnung y^* ist in diesem Fall:

$$y^* = \{(m_1; w_2), (m_2; w_1), (m_3; w_3)\}$$

Angenommen m_2 gelingt es mit m_3 eine Koalition zu bilden, so dass m_3 und er selbst die falschen Präferenzen $P'(m_3) = w_3, w_2, w_1$und $P'(m_2) = w_2, w_1$ angeben. Dies führt zur stabilen Zuordnung $x = \{(m_1; w_1), (m_2; w_2), (m_3; w_3)\}$, bei der sich m_3 nicht verbessert, m_2 aus der Koalition profitiert und sich m_1 nicht verschlechtert, sondern hier ebenfalls verbessert.[114]

Bei Roth (2008) wird dieses Theorem sogar noch dahingehend verstärkt, dass auch keine Koalition von sowohl Frauen als auch Männern durch Falschangabe ihrer Präferenzen eine für jeden an der Koalition beteiligten Agenten vorteilhafte Zuordnung erreichen kann.[115] Huang (2006) stellte diese Feststellungen auf die Probe und versuchte Strategien zu ersinnen, die eine für jeden Beteiligten erfolgreiche Manipulation gewährleisten. Allerdings führten auch diese Anstrengungen nur zu einer Bestätigung des Theorems und der Feststellung, dass sich durch eine Koalitionsbildung zumindest einige Agenten der Koalition verbessern können, ohne dass sich andere verschlechtern – für mindestens einen Komplizen ist jedoch keine Verbesserung erzielbar.[116] Es gelingt zwar, eine Strategie zu entwerfen, bei der jeder Komplize im Durchschnitt eine Verbesserung erwarten kann, sich jedoch auch der Gefahr aussetzen muss, einem weniger präferierten Agenten zugeordnet zu werden.[117]

5.1.3 Manipulation anhand von endowments

Eine weitere interessante Option der Manipulation im Hochzeitsproblem beschreiben ausgehend von den Arbeiten von Postlewaite (1979) und Balinski und Sönmez (1999) Sertel und Ozkal-Sanver (2002). Sie untersuchen, inwiefern das Hochzeitsproblem anhand von *endowments* manipulierbar ist. Dabei geben die Agenten

[114] Ähnlich bei Knörzer (2009), S. 13 f.
[115] Vgl. Roth (2008), S. 544.
[116] Vgl. Huang (2006), S. 6 ff.
[117] Vgl. Huang (2006), S. 8 ff.

nicht ihre eigenen Präferenzen falsch an, sondern beeinflussen durch die Manipulation ihrer eigenen *endowments* die Präferenzen anderer Agenten. *Endowments* lassen sich im Hochzeitsproblem am treffendsten mit „Aussteuer" oder „Mitgift" übersetzen. Im von Sertel und Ozkal-Sanver (2002) aufgestellten Modell wird diese jedoch nicht wie im klassischen Sinne auf die von der Frau in die Ehe eingebrachten Güter beschränkt, sondern auch die Männer verfügen über *endowments*.[118] Sie stellen somit die Anfangsausstattung bzw. das Vermögen eines Agenten dar. Klassische Zuordnungsprobleme untersuchen den Fall, in dem die Präferenzen intrinsisch sind, obwohl die Präferenzen eines Agenten über potentielle Partner von zahlreichen Attributen abhängig sein können. Normalerweise hängen die Konsummöglichkeiten eines Agenten von den jeweiligen *endowments* des Paares ab, in dem er sich nach der Zuordnung wiederfindet, was vorab berücksichtigt werden kann.[119] Sertel und Ozkal-Sanver (2002) gehen in ihrem um *endowments*-Profile erweiterten Modell davon aus, dass alle Agenten nicht-negative *endowments* aufweisen und diese ehelich gemäß einer Konsumfunktion konsumiert werden. Das klassische Hochzeitsproblem entspricht somit dem Fall, dass alle *endowments* Null sind und es keinen ehelichen Konsum durch die Zuordnung gibt.

Da sich die Manipulation anhand von *endowments* nicht auf das ursprüngliche Modell des Hochzeitsproblems anwenden lässt und sich somit von diesem entfernt, soll im Folgenden nur knapp auf die Ergebnisse eingegangen werden, die in der Realität eine wichtige Rolle spielen können.

Es wird zwischen vier unterschiedlichen Typen der Manipulation anhand von *endowments* unterschieden. Der Manipulation anhand a) der Zerstörung von *endowments*, b) des Verbergens von *endowments*, c) des perfekten Verbergens von *endowments* und d) der vorherigen Spende von *endowments*.

Fall b) unterscheidet sich von Fall c) dadurch, dass die *endowments* bei b) vor allen Agenten mit Ausnahme des zugeordneten Partners, bei c) jedoch auch vor dem Partner verborgen werden. Bei b) werden die verborgenen *endowments* somit von beiden Partnern konsumiert, bei c) jedoch nur von dem Verbergenden.[120]

Für a) gilt:

1. Die *„deferred acceptance procedure"*, die die M-optimale, stabile Zuordnung x^* liefert, ist bei jeder monotonen Konsumfunktion durch eine Frau anhand der Zerstörung von *endowments* manipulierbar.[121]

2. Die *„deferred acceptance procedure"*, die die M-optimale, stabile Zuordnung x^* liefert, ist bei beliebiger monotoner Konsumfunktion nicht-manipulierbar anhand der Zerstörung von *endowments* durch einen Mann.[122]

[118] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 67.
[119] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 66.
[120] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 72.
[121] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 70 ff.
[122] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 75 f.

Letzteres folgt direkt aus der Überlegung, dass eine Verschlechterung des *endowments* eines Mannes, wenn überhaupt, nur dazu führen wird, dass er seine Wertschätzung bei potentiellen Partnern verschlechtert, so dass er von Frauen, die ihn bisher abgelehnt haben, auch weiterhin abgelehnt werden wird und sich nicht verbessern kann.[123] Äquivalentes gilt in beiden Fällen für die *„deferred acceptance procedure"*, die die W-optimale, stabile Zuordnung liefert.[124]

Für b) gilt:

1. Die *„deferred acceptance procedure"*, die die M-optimale, stabile Zuordnung x^* liefert, ist bei jeder monotonen Konsumfunktion durch eine Frau anhand desVerbergens von *endowments* manipulierbar.[125]
2. Die *„deferred acceptance procedure"*, die die M-optimale, stabile Zuordnung x^* liefert, ist bei beliebiger monotoner Konsumfunktion nicht-manipulierbar anhand des Verbergens von *endowments* durch einen Mann.[126]

Letzteres folgt erneut aus obiger Überlegung und Äquivalentes gilt erneut im symmetrischen Fall, bei dem die Frauen die Anträge machen.

Für c) gilt:

1. Die *„deferred acceptance procedure"*, die die M-optimale, stabile Zuordnung x^* liefert, ist bei jeder monotonen Konsumfunktion durch eine Frau anhand desperfekten Verbergens von *endowments* manipulierbar.
2. Die *„deferred acceptance procedure"*, die die M-optimale, stabile Zuordnung x^* liefert, ist bei bestimmten monotonen Konsumfunktionen manipulierbar anhand des perfekten Verbergens von *endowments* durch einen Mann.[127]

Ersteres folgt aus der Überlegung, dass b) direkt c) impliziert.[128] Äquivalentes gilt auch hier im symmetrischen Fall.

D.h. a), b) und c) implizieren, dass eine Frau die M-optimale Zuordnung anhand der Zerstörung oder des Verbergens einiger ihrer *endowments* manipulieren kann, während ein Mann die M-optimale Zuordnung immer dann nicht manipulieren kann, wenn er den verborgenen Teil seiner *endowments* mit seinem Partner

[123] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 75.
[124] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 81.
[125] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 72 ff.
[126] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 75.
[127] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 76, für die Bedingungen an entsprechende Konsumregeln.
[128] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 76.

teilen muss. In Fall d) haben die Agenten nun die Möglichkeit, anderen Agenten vorab einen Teil ihrer *endowments* zu spenden („*predonation*“).

Für d) gilt:

1. Die *„deferred acceptance procedure"*, die die M-optimale, stabile Zuordnung x^* liefert, ist bei jeder monotonen Konsumfunktion durch einen Mann anhand der Spende von *endowments* an eine Frau oder einen Mann manipulierbar.[129]
2. Die *„deferred acceptance procedure"*, die die M-optimale, stabile Zuordnung x^* liefert, ist bei jeder monotonen Konsumfunktion durch eine Frau anhand der Spende von *endowments* an eine Frau oder einen Mann manipulierbar.[130]

Durch die Möglichkeit der vorherigen Spende wird der Raum für eine erfolgreiche Manipulation somit noch einmal vergrößert.

Eine Antwort auf die von Sertel und Ozkal-Sanver (2002) postulierte Frage nach der maximalen Teilmenge von Konsumfunktionen, auf die ihre Ergebnisse angewandt werden können, geben Fiestras-Janeiro, Klijn et al. (2004), indem sie die Klassen von Konsumfunktionen, unter denen optimale Zuordnungsverfahren anhand der Spende von *endowments* manipuliert werden können, charakterisieren.

5.2 Manipulation im „college admissions problem“

An dieser Stelle soll erneut überprüft werden, ob sich die im vorherigen Abschnitt getroffenen Theoreme auf das allgemeinere *„college admission problem“* übertragen lassen.

5.2.1 Manipulation anhand von Präferenzen

Theorem 18:

> Theorem 9 kann auf das *„college admissions problem“* übertragen werden.[131] D.h. im *„college admissions problem“* existiert kein stabiles Zuordnungsverfahren, in dem das Preisgeben der wahren Präferenzen eine dominante Strategie für jeden Agenten ist.[132]

Dies folgt unmittelbar aus dem Umstand, dass das Hochzeitsproblem ein Spezialfall des *„college admissions problem“* ist. Wenn für den Spezialfall kein solches Zuordnungsverfahren existiert, kann folglich auch für den

[129] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 78 ff.
[130] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 80.
[131] Vgl. Roth (1985), S. 282.
[132] Vgl. Roth (1985), S. 285.

allgemeinen Fall kein solches existieren. Somit kann auch das hieraus gefolgerte Theorem 10 auf das *„college admissions problem"* übertragen werden.

Theorem 19:

Theorem 11 kann nicht auf das *„college admissions problem"* übertragen werden.[133]

Theorem 20:

Theorem 12 kann nicht vollständig auf das *„college admissions problem"* übertragen werden, sondern gilt nur noch für die Studenten.

Im *„college admissions problem"* gilt somit:

Die *„deferred acceptance procedure"*, die für beliebige Präferenzen P immer die S-optimale, stabile Zuordnung $x^*(P)$ liefert, macht es für jeden $s \in S$ zu einer schwach dominanten Strategie seine wahren Präferenzen anzugeben. Wenn Universitäten *responsive* Präferenzen haben, gibt es jedoch kein stabiles Zuordnungsverfahren, das es eine schwach dominante Strategie für jede $c \in C$ macht, ihre wahren Präferenzen anzugeben.[134]

Für einen Beweis sei an dieser Stelle auf Roth (1985), S. 286 f, verwiesen. Das so gefolgerte Ergebnis, dass das S-optimale, stabile Zuordnungsverfahren für Studenten den Anreiz eliminiere, ihre Präferenzen falsch anzugeben, ist jedoch nicht ganz korrekt, wenn man die Betrachtung des Problems um die Manipulation anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen erweitert, auf die im Folgenden noch genauer eingegangen wird. An dieser Stelle sei jedoch vorweggenommen, dass Theorem 20 aufgrund des noch folgenden Theorems 25 dahingehend angepasst werden muss, dass für Studenten lediglich der Anreiz eliminiert wird, *einseitig* ihre Präferenzen falsch anzugeben; in Kooperation mit einer Universität kann der Student das Verfahren weiterhin manipulieren.[135]

Theorem 21:

Theorem 13 kann auf das *„college admissions problem"* übertragen werden.[136]

Dies ist schon insofern schlüssig, als dass die Studenten im *„college admissions problem"* direkt mit den Frauen des Hochzeitsproblems verglichen werden können, da sich diese beiden Seiten in beiden Modellen nicht unterscheiden und das Hochzeitsproblem einen Spezialfall des *„college admissions problem"* darstellt.

[133] Vgl. Roth (1985), S. 285 ff.
[134] Vgl. Roth (1985), S. 287; vgl. weiter Roth (2008), S. 548.
[135] Vgl. Sönmez (1999), S. 155.
[136] Vgl. Knörzer (2009), S. 17 (Theorem 10 verbunden mit 11).

Abkürzend für die restlichen Theoreme lässt sich für das *„college admissions problem“* folgendes zentrale Theorem aufstellen:

Theorem 22:

> Für das *„college admissions problem“* existiert kein Zuordnungsverfahren, das zu stabilen Zuordnungen führt und in dem es gleichzeitig für alle Agenten eine dominante Strategie ist, die Präferenzen mit Ausnahme der Erstwahl wahrheitsgemäß anzugeben.[137]

Für den Fall, dass einzelne Universitäten somit lediglich einen Studienplatz anbieten, gilt für diese folgendes Theorem:

Theorem 23:

> In der *„deferred acceptance procedure”*, die die C-optimale, stabile Zuordnung $x^*(P)$ liefert, ist es im *„college admissions problem“* für alle Universitäten, die nur einen Studienplatz vergeben, eine dominante Strategie ihre wahren Präferenzen P^* anzugeben.[138]

5.2.2 Manipulation durch vorzeitige bilaterale Vereinbarungen

Theorem 24:

> Theorem 17 kann auf das *„college admissions problem“* übertragen werden.[139]

Sönmez (1999) geht auf die Manipulation anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen im *„college admissions problem“* genauer ein, betrachtet die Problematik jedoch am Beispiel des zweiseitigen Marktes der Zuordnung von angehenden Ärzten zu Krankenhäusern, welcher mit dem hier genutzten zweiseitigen Markt von Universitäten und Studenten formal identisch ist. Dabei wird zum einen der Fall betrachtet, in dem sich bei gegenseitigem Präferieren eine Universität (ein Krankenhaus) vorab mit einem Studenten (angehender Arzt) arrangiert und diesem einen Platz zusichert, so dass dieser am eigentlichen Zuordnungsverfahren nicht mehr teilnimmt und die Universität ihre Quote um einen Platz verringert. Sollte dies aufgrund rechtlicher Restriktionen nicht möglich sein, können beide Seiten dennoch eine Koalition im Spiel selbst bilden, indem sie sich wechselseitig als Erstwahl angeben. Ein Zuordnungsverfahren ist demnach manipulierbar anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen, wenn es eine Universität und einen Studenten gibt, die beide durch eine vorab getroffene Vereinbarung profitieren (mindestens einer von beiden strikt).[140] Formal bedeutet dies im Sinne der getroffenen Definitionen für eine stabile Zuordnung y: $\exists\, c \in C, s \in S : cR(s)\, y(s) \wedge sR(c)\, y(c)$,

[137] Vgl. Knörzer (2009), S. 14.
[138] Vgl. Knörzer (2009), S. 18.
[139] Vgl. Knörzer (2009), S. 17 (Theorem 10 verbunden mit 11).
[140] Vgl. Sönmez (1999), S. 152.

wobei entweder $cP(s)\,y(s)$ oder $sP(c)\,y(c)$ gelten muss.[141] Sönmez (1999) postuliert und beweist für das *„college admissions problem"* als erstes Ergebnis folgendes Theorem:

Theorem 25:

> Es existiert kein Zuordnungsverfahren, das sowohl stabil als auch nicht-manipulierbar anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen ist.[142]

Bei instabilen Zuordnungsverfahren ist das Problem der Manipulation anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen allgegenwärtig und auch empirisch gut belegbar. In Newcastle im Vereinigten Königreich beispielsweise schlossen aufgrund instabiler Zuordnungsverfahren bei der Zuordnung von angehenden Ärzten zu Krankenhäusern 80 Prozent aller angehenden Ärzte eine vorherige Vereinbarung mit einem Krankenhaus ab.[143]
Geht man der Fragestellung nach, welche Agentenpaare überhaupt eine stabile Zuordnung anhand von vorher getroffenen Vereinbarungen manipulieren können, so ergibt sich folgendes Theorem:

Theorem 26:

> Angenommen ein stabiles Zuordnungsverfahren wird vom Paar (c, s) mit $c \in C$ und $s \in S$ anhand einer vorzeitigen bilateralen Vereinbarung manipuliert, dann muss Student s entweder a) einer derjenigen Studenten sein, die Universität c im nicht-manipulierten Spiel zugeordnet werden würden, oder b) strikt weniger präferiert als irgendein anderer Student sein, der der Universität c im nicht-manipulierten Spiel zugeordnet werden würde.[144]

Im Fall von a) profitiert verständlicherweise nur die Universität c strikt von der Manipulation, im Fall von b) profitieren jedoch sowohl die Universität c als auch der Student s beide strikt von der Manipulation.

5.2.3 Manipulation anhand von endowments

Die Manipulation anhand von *endowments* ist grundsätzlich auch im *„college admissions problem"* im Sinne einer Anfangsausstattung denkbar. Einen möglichen Weg, *endowments* auch beim *„college admissions problem"* zu untersuchen, schlagen Balinski und Sönmez (1999) ein, indem sie untersuchen, inwiefern Studenten die C-optimale Zuordnung manipulieren können, indem sie im Aufnahmetest ihre erreichbaren Punkte unterschreiten. Die erzielten Punkte können hierbei als *endowments* der Studenten angesehen werden, die nach der Zuordnung vollständig von den Universitäten konsumiert werden. D.h. anders als im obigen Modell,

[141] Ähnlich bei Sönmez (1999), S. 152 mit anderer Definition.
[142] Vgl. Sönmez (1999), S. 153.
[143] Vgl. Sönmez (1999), S. 152 f.
[144] Vgl. Sönmez (1999), S. 155 f, mit Beweis.

welches beim erweiterten Hochzeitsproblem von Sertel und Ozkal-Sanver (2002) definiert wurde, sind die *endowments* der Universitäten mit Null festgelegt und die Studenten konsumieren nichts.

Demnach hat ein Student den Anreiz, das Spiel anhand der Zerstörung seiner *endowments*, d.h. seiner Punkte im Aufnahmetest, zu manipulieren, wenn das C-optimale Zuordnungsverfahren und eine Konsumfunktion, bei der jeder Partner die *endowments* des jeweils anderen Partners konsumiert, zur Anwendung kommt.[145]

Balinski und Sönmez (1999) zeigen außerdem, dass das S-optimale Zuordnungsverfahren im *„college admissions problem"* das einzige stabile Zuordnungsverfahren ist, das nicht-manipulierbar anhand der Zerstörung von *endowments* durch einen Studenten ist. D.h. Verbesserungen der Studenten werden entsprechend anerkannt und Studenten werden von den Universitäten in Form steigender Präferenzen höher wertgeschätzt, wenn sie eine höhere Punktzahl erreichen.[146] Darüber hinaus kann unter dem S-optimalen Zuordnungsverfahren kein Student von der Manipulation anhand des Verbergens seiner *endowments* profitieren.[147]

5.2.4 Manipulation anhand der Quote

Die Universitäten müssen nicht nur angeben, welche Präferenzen sie über einzelne Studenten und Mengen von Studenten haben, sondern auch, wie viele Studienplätze sie vergeben möchten – ihre Quote q. Die Wahrheit zu sagen ist hier jedoch nicht immer vorteilhaft, so dass zusätzlich folgendes Theorem Gültigkeit besitzt, das im Hochzeitsproblem nicht gegenwärtig sein kann:

Theorem 27:

> Für das *„college admissions problem"* existiert kein stabiles Zuordnungsverfahren, das es für eine Universität zu einer dominanten Strategie macht, immer die wahre Anzahl der zu vergebenden Studienplätze q preiszugeben.[148]

Nach Sönmez (1997), der die Möglichkeiten von Krankenhäusern untersuchte, die Zuordnung anhand einer Unterangabe der tatsächlichen Kapazitäten, die ebenfalls eine private Information darstellen, zu manipulieren, existiert demnach keine Zuordnung, die stabil und nicht-manipulierbar anhand der Quote ist.[149] Ein Zuordnungsverfahren ist per Definition nicht-manipulierbar anhand der Quote, wenn keine Universität jemals von einer Falschangabe ihrer Quote profitieren kann.[150] Das allgemein gefasste Theorem 27 lässt sich weiter konkretisieren:

[145] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 71.
[146] Vgl. Balinski und Sönmez (1999), S. 89 f.
[147] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 75, vgl. weiter Balinski und Sönmez (1999), S. 90.
[148] Vgl. Sönmez (1997), S. 200 ff; vgl. weiter Roth (2008),S. 548.
[149] Vgl. Sönmez (1997), S. 197 f.
[150] Vgl. Sönmez (1997), S. 200.

Theorem 28:

> Bei mindestens zwei Universitäten und drei Studenten existiert für das *„college admissions problem"* kein Zuordnungsverfahren, das stabil und nicht-manipulierbar anhand der Quote ist.[151]

Theorem 28 gilt demnach nicht bei a) nur einer Universität, b) nur einem Studenten und c) zwei Universitäten und zwei Studenten. Im Fall von a) und b) existiert jeweils nur eine stabile Zuordnung, so dass das Zuordnungsverfahren nicht-manipulierbar anhand der Quote ist. Im Fall c) ist zumindest die S-optimale Zuordnung nicht-manipulierbar anhand der Quote[152], auf die C-optimale Zuordnung trifft dies im Fall von zwei Universitäten und zwei Studenten jedoch nicht zu.[153]

Abschließend sei an dieser Stelle ein sowohl für die Manipulation anhand von Präferenzen als auch für Manipulationen anhand der Quote gültiges Theorem erläutert, welches durch empirische Beobachtungen entstand. Aufgrund empirischer Beobachtungen wurde vermutet, dass die Menge der stabilen Zuordnungen bei größeren Märkten kleiner zu werden scheint, so dass auf beiden Seiten des Marktes weniger Möglichkeiten zur Manipulation anhand von Präferenzen oder der Quote gegeben sind. Dies verwundert angesichts des Umstandes, dass in der Theorie die Menge der stabilen Zuordnungen schon im einfachen Hochzeitsproblem mit der Anzahl der Agenten steigt und so auch die Möglichkeiten einer erfolgreichen Manipulation zunehmen, da immer mehr Agenten nicht ihre präferierte Zuordnung erhalten. Im empirisch beobachteten und anschließend rechnerisch nachgestellten Markt der Zuordnung angehender Ärzte zu Krankenhäusern hat sich jedoch gezeigt, dass die von den angehenden Ärzten bei größer werdendem Markt angegebene Rangliste nicht entsprechend länger wird, was zur Folge hat, dass bei strikten Präferenzen die Menge der stabilen Zuordnungen kleiner wird.[154] Immorlica und Mahdian (2005) haben auch für das Hochzeitsproblem bestätigt, dass die Menge der Agenten, die in unterschiedlichen stabilen Zuordnungen unterschiedlichen Partnern zugeordnet werden, mit wachsender Größe des Marktes entsprechend kleiner wird, so dass auch die Manipulationsanreize sinken. Diese Aussage lässt sich von der *„one-to-one"* Zuordnung des Hochzeitsproblems insofern auch auf das *„many-to-one college admissions problem"* übertragen, als dass der Anteil der Universitäten, die von einer Manipulation anhand von Präferenzen oder der Quote profitieren könnten, gegen Null geht, wenn die Größe des Marktes gegen Unendlich geht, die Präferenzen der Bewerber strikt, unkorreliert und konstanter Länger sowie die Quoten der Universitäten begrenzt sind, die Anzahl der Bewerber nicht schneller wächst als die Gesamtquote aller Universitäten und jeder Bewerber für jede Universität akzeptabel ist.[155] Dies relativiert die Bedeutung der zuvor getroffenen Theoreme für die Praxis erheblich.

[151] Vgl. Sönmez (1997), S. 201.
[152] Vgl. Sönmez (1997), S. 202.
[153] Vgl. Sönmez (1997), S. 201.
[154] Vgl. Roth (2008), S. 557 f.
[155] Vgl. ausführlich Kojima und Pathak (2009)

6 Zusammenfassung und Implikationen

6.1 Wesentliche Befunde

Bei der Fragestellung, ob immer eine stabile Zuordnung existiert, führten Gale und Shapley in ihrem 1962 veröffentlichten Artikel *„College Admissions and the Stability of Marriage“* einen als *„deferred acceptance procedure“* bekannten Algorithmus ein[156], mit dessen Hilfe stabile Zuordnungen gefunden werden sollten. Gleichzeitig stellten sie dabei fest, dass für ein solches Zuordnungsspiel wie das Hochzeitsproblem stets mindestens eine stabile Zuordnung als Lösung existiert, so dass es kein Paar gibt, das lieber miteinander verheiratet wäre als mit dem im Matching zugeordneten Partner.[157] Dies gilt selbst bei ungleich großen Mengen M und W.[158] Darüber hinaus enthält die Menge der stabilen Zuordnungen bei strikten Präferenzen für die *„deferred acceptance procedure“* sowohl eine M- als auch W-optimale Zuordnung, die für jeden Mann bzw. jede Frau die am meisten präferierte, erreichbare Zuordnung ist.[159] Identisch sind diese beiden Zuordnungen nur dann, wenn lediglich eine einzige stabile Zuordnung existiert.[160] Sollte dies nicht der Fall sein, ist die M- bzw. W-optimale Zuordnung zugleich die von den Frauen bzw. Männern am wenigsten präferierte, erreichbare, stabile Zuordnung.[161] Es existiert jedoch nicht nur keine stabile Zuordnung, die jeder Mann bzw. jede Frau der M- bzw. W-optimalen Zuordnung vorzieht, sondern auch keine instabile Zuordnung, die vorgezogen wird. Die M- bzw. W-optimale Zuordnung ist somit schwach pareto-optimal in der Menge aller Zuordnungen.[162] Sie ist lediglich schwach pareto-optimal, da es instabile Zuordnungen geben kann, die von einigen Agenten präferiert und von den übrigen gleich gut eingeschätzt werden.[163]

Diese zunächst nur für das Hochzeitsproblem gültigen Feststellungen lassen sich größtenteils auch auf das allgemeinere *„college admissions problem“* übertragen. Durch die bei den Universitäten in der *„many-to-one“*-Zuordnung eingeführte Quote, welche die Anzahl der verfügbaren Studienplätze kennzeichnet, können jedoch nicht sämtliche Theoreme direkt übertragen werden. Zunächst muss das Modell deshalb dahingehend erweitert werden, dass Universitäten nicht mehr nur Präferenzen über einzelne Studenten haben, sondern auch über unterschiedliche Mengen von Studenten. Üblicherweise wird dabei von *responsive* Präferenzen ausgegangen, d.h. eine Universität präferiert von zwei Mengen von Studenten, die sich nur in einem Studenten unterscheiden, diejenige Menge, die den höher geschätzten Studenten enthält. Auf diese Weise werden die Präferenzen über Mengen von Studenten in eine plausible Beziehung zu den Präferenzen über einzelne

[156] Ihnen war zu diesem Zeitpunkt nicht bekannt, dass das National Resident Matching Program (NRMP), damals noch National Intern Matching Program (NIMP) genannt, einen entsprechenden Algorithmus bereits seit 1950 in den USA einsetzte, um angehende Ärzte und Krankenhäuser zuzuordnen, wie Roth (1984a), S. 1013, zeigt.
[157] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 12 f; vgl. weiter Roth (1985), S. 279.
[158] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 13.
[159] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 14; vgl. weiter Roth (1985), S. 279.
[160] Vgl. Gale und Shapley (1962), S. 13.
[161] Vgl. Roth (1985), S. 279.
[162] Vgl. Roth (1985), S. 279.
[163] Vgl. Roth (2008), S. 542 f.

Studenten gesetzt.[164] Doch selbst diese Erweiterung des Modells führt nicht dazu, dass die Aussage, dass weder eine stabile noch eine instabile Zuordnung existiert, die von jedem Agenten seiner optimalen Zuordnung vorgezogen wird, vom Hochzeitsproblem auf das *„college admissions problem“* übertragen werden kann. Diese Aussage lässt sich im *„college admissions problem“* nur noch für die Seite der Studenten aufrecht halten, für die die S-optimale Zuordnung weiterhin schwach pareto-optimal ist. Dies bedeutet wiederum, dass es Zuordnungen geben kann, die von allen Universitäten der C-optimalen Zuordnung vorgezogen werden.[165]

Durch die in den Modellen auftretende private Information in Form der Präferenzen über andere Agenten entstehen Manipulationsanreize, die je nach Modell und Algorithmus unterschiedlich ausgenutzt werden können, um sich selbst besserzustellen. Zusammengefasst lassen sich Manipulationen für beide Modelle anhand von Präferenzen, anhand von Quoten, anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen[166] und anhand von *endowments*[167] ausnutzen. Welche Anreize jeweils für die Agenten bestehen, sei im Folgenden noch einmal zusammengefasst. Zunächst muss dabei festgehalten werden, dass im Hochzeitsproblem kein stabiles Zuordnungsverfahren existiert, das eine Manipulation vollständig ausschließen lässt.[168] Bei strikten Präferenzen und der Existenz von mehr als einer stabilen Zuordnung kann sich immer mindestens ein Agent durch Manipulation besserstellen, wenn alle anderen Agenten die Wahrheit sagen.[169] Kommt die M-optimale Variante der *„deferred acceptance procedure“* zum Einsatz, bei der die Männer den Frauen die Heiratsanträge unterbreiten, ist es jedoch für jeden Mann eine schwach dominante Strategie, seine wahren Präferenzen anzugeben, da er sich nicht weiter verbessern kann.[170] Es gibt in diesem Fall keinerlei Manipulationsanreize für einen einzelnen Mann, wenn alle anderen Männer ihre wahren Präferenzen angeben, da er im besten Fall demselben Partner zugeordnet wird, dem er auch bei wahrer Präferenzangabe zugeordnet werden würde. Für Frauen besteht unter diesen Voraussetzungen hingegen ein Anreiz zu manipulieren, da die einfache Strategie, sämtliche Männer mit Ausnahme ihres Favoriten als inakzeptabel anzugeben, bereits zum Erfolg führt und die M-optimale zu einer W-optimale Zuordnung werden lässt.[171] Daraus resultierend ist es für alle Frauen eine schwach dominierte Strategie, ihren Favoriten nicht an erster Stelle der Präferenzliste anzugeben.[172] Keinerlei Manipulationsanreize auf Seiten der Frauen bestehen bei M-optimaler Zuordnung nur dann, wenn dies zugleich die einzige stabile Zuordnung ist.[173] Bei der Manipulation anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen ist es unter der *„deferred acceptance procedure”* nicht möglich, dass jeder Teilnehmer einer Koalition, die die Zuordnung anhand falscher Präferenzangaben manipulieren möchte, durch die Falschangabe seiner Präferenzen profitieren kann. Verstärkend konnte sogar festgestellt werden, dass es auch keinen anderen Zu-

[164] Vgl. Roth (1985), S. 281 ff.
[165] Vgl. Roth (1985), S. 283 ff.
[166] Vgl. Sönmez (1999), S. 152.
[167] Vgl. Postlewaite (1979).
[168] Vgl. Roth (1985), S. 280; vgl. weiter Roth (1984b), S. 384.
[169] Vgl. Roth (2008), S. 544.
[170] Vgl. Roth (1985), S. 280; vgl. weiter Roth (1984b), S. 385.
[171] Vgl. Teo, Sethuraman et al. (2001), S. 430; vgl. weiter Roth (2008), S. 543 f.
[172] Vgl. Knörzer (2009), S. 14.
[173] Vgl. Knörzer (2009), S. 14.

ordnungsmechanismus gibt, in dem dies möglich ist und der gleichzeitig eine stabile Zuordnung liefert.[174] Bei der Manipulation anhand von *endowments* zeigt sich, dass die M-optimale *„deferred acceptance procedure“* in erster Linie durch eine Frau manipulierbar ist, wobei auch hier Äquivalentes wie in obigen Fällen stets für die W-optimale Prozedur gilt. In bestimmten Fällen können hier jedoch auch Manipulationsanreize für einen Mann bestehen.[175] Für Männer lässt sich zusammenfassend jedoch recht einfach postulieren, dass es unter der M-optimalen *„deferred acceptance procedure“* fast immer eine dominante Strategie ist, die Wahrheit zu sagen. Äquivalentes gilt für die Frauen bei einer W-optimalen *„deferred acceptance procedure“*. Einziger Ausweg ist es, Risiko einzugehen und nur im Erwartungswert eine bessere Zuordnung zu realisieren, möglicherweise aber auch einem weniger präferierten Partner zugeordnet zu werden.[176]

Auch für die Manipulationsanreize hat sich gezeigt, dass sich diese weitgehend vom Hochzeitsproblem auf das *„college admissions problem“* übertragen lassen. Darüber hinaus bestehen durch das veränderte Modell jedoch weitere Anreize, die im Hochzeitsproblem nicht berücksichtigt werden mussten. Allerdings ist es im *„college admissions problem“* nur für jeden Studenten eine schwach dominante Strategie seine wahren Präferenzen zu nennen[177]; im Falle von *responsive* Präferenzen gilt dies nicht ebenso für die Universitäten. Zieht man auch hier die Möglichkeit der Manipulation anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen in die Betrachtung ein, relativiert sich das Theorem sogar dahingehend, dass für Studenten lediglich kein Anreiz besteht, *einseitig* zu manipulieren.[178] Zusammenfassend konnte festgestellt werden, dass im *„college admissions problem“* kein stabiles Zuordnungsverfahren existiert, das eine Manipulation anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen unmöglich macht.[179] Doch auch Manipulationen anhand der für die Universitäten eingeführten Quote sind denkbar, so dass festgehalten werden muss, dass es für eine Universität vorteilhaft sein kann, ihre wahre Quote zu verschweigen und eine geringere Quote anzugeben. Es wurde gezeigt, dass bei mehr als einer Universität und zwei Studenten kein stabiles Zuordnungsverfahren mehr existiert, welches nicht-manipulierbar anhand der Quote ist.[180] In der Praxis sinken die Möglichkeiten einer erfolgreichen Manipulation jedoch mit zunehmender Größe des Marktes.[181]

Neben einem Überblick für die bekannte *„deferred acceptance procedure“* konnten auch für die Entwicklung alternativer Zuordnungsverfahren einige wichtige Ergebnisse und Einschränkungen charakterisiert werden. Demnach lässt sich etwa das Problem, dass die *„deferred acceptance procedure“* bei ländlichen Krankenhäusern in der Praxis nicht zu einer vollständig ausgeschöpften Quote führt, auch durch keinen anderen, neu entwickelten Mechanismus lösen, da die Menge der zugeordneten Studenten und die Menge der nicht besetzten Positionen bei strikten und *responsive* Präferenzen wie in Theorem 7 beschrieben bei jeder stabile

[174] Vgl. Huang (2006), S. 2.
[175] Vgl. Sertel und Ozkal-Sanver (2002), S. 70 ff.
[176] Vgl. Huang (2006), S. 8 ff.
[177] Vgl. Roth (1985), S. 287; vgl. weiter Roth (2008), S. 548.
[178] Vgl. Sönmez (1999), S. 155.
[179] Vgl. Sönmez (1999), S. 153.
[180] Vgl. Sönmez (1997), S. 201.
[181] Vgl. Kojima und Pathak (2009); Immorlica und Mahdian (2005).

Zuordnung identisch ist.[182] Ein stabiler Algorithmus ohne jegliche Manipulationsanreize ist zudem ausgeschlossen.

Wie eingangs erwähnt, kann jedoch auch diese Arbeit nur einen Ausschnitt der umfassenden Thematik beleuchten und spart so beispielsweise die notwendigen Anpassungen und sich ergebenden Probleme von Indifferenzen in den Präferenzen, die in der Praxis beispielsweise bei Universitäten auftreten können, die Studenten anhand ihrer Abiturnote bewerten, größtenteils aus. Als kleiner Einblick in dieses Feld sei hier nur exemplarisch angemerkt, dass beispielsweise das grundlegende Theorem 2 für das Hochzeitsproblem und somit auch Theorem 7 für das *„college admissions problem“* bei Indifferenzen keine Gültigkeit mehr besitzt, d.h. es existiert nicht zwingend eine M- und W-optimale, stabile Zuordnung. Für weitere Ergebnisse dieses Forschungsbereichs sei statt vieler auf Roth (1984a), Abdulkadiroglu, Pathak et al. (2009) und Ergin und Sönmez (2006) verwiesen, aus denen sich auch neue Fragestellungen für die Wissenschaft ergeben – etwa welche in der Praxis bei Indifferenzen auftretenden Wohlfahrtsverluste durch die Anwendung alternativer Zuordnungsverfahren vermieden werden könnten und welche Manipulationsanreize sich hierbei einstellen.

6.2 Implikationen für die Wissenschaft

Die *„deferred acceptance procedure“* liefert sowohl im Hochzeitsproblem als auch im *„college admissions problem“* eine sehr einseitige Lösung des Zuordnungsproblems, bei der entweder eine W- oder M- bzw. C- oder S-optimale, stabile Zuordnung erzielt wird. Gerade bei der praktischen Anwendung für die Vergabe von Studienplätzen gibt es durchaus kontroverse Meinungen, wessen Interessen Rechnung getragen werden sollte und ob eine *faire* Vergabe anhand zentraler Vergleichstest einer für den Studenten optimalen Zuordnung anhand seiner persönlichen Präferenzen vorzuziehen ist. Balinski und Sönmez (1999) gelangen bei der Untersuchung der Defizite des türkischen Vergabeverfahrens zu der Überzeugung, dass stets die S-optimale, stabile Zuordnung einer auf komparativen Vorteilen basierenden Zuordnung vorzuziehen sei, da Motivation für den Erfolg wichtiger sei als bloße Testergebnisse und dem Studenten die größtmögliche Freiheit bei der Wahl der Universität gegeben werden sollte.[183] In der Praxis wird derzeit in vielen Fällen ein angepasstes S-optimales Zuordnungsverfahren ein- und umgesetzt.[184] Zukunftsweisender als derartige Lösungen könnte die Entwicklung eines neuen Zuordnungsmechanismus‘ sein, der den Interessen beider Seiten gleichermaßen Rechnung trägt und gleichzeitig Problemen aus dem Weg geht, die sich durch verzögerte Annahmen und Absagen in der Praxis ergeben können, so dass Studenten erst lange nach Semesterbeginn aufgenommen werden.[185]

Des Weiteren sollte weiterhin untersucht werden, ob es unter den sich durch Manipulation – in welcher Form auch immer – einstellenden Zuordnungen in generellen Hochzeits- und *„college admissions“*-Problemen

[182] Vgl. Roth (2008), S. 556.
[183] Vgl. Balinski und Sönmez (1999), S. 74.
[184] Vgl. Roth (2008), S. 552 ff.
[185] Vgl. Braun, Dwenger et al. (2010).

wiederum eine schwach dominante Zuordnung gibt, die sich wahrscheinlich einstellen wird.[186]

Empirische Erhebungen, welche die Funktionsweise mannigfaltiger Zuordnungsverfahren auf zweiseitigen Märkten unterschiedlicher Art untersuchen, sind angesichts der wachsenden Bedeutung des gesamten Themas sowohl in der Literatur als auch in der Praxis und Politik von zentraler Bedeutung und müssen auch in Zukunft weiter verfolgt werden. Von besonderem Interesse sind dabei die Auswirkungen von jüngsten Veränderungen in etablierten Zuordnungsverfahren in der Praxis auf die realisierten Zuordnungen und die sich hieraus praktisch ergebenden Probleme. Durch weitere empirische Beobachtungen kann aus etablierten Mechanismen gelernt und die Arten von Marktversagen, die sie lösen können, charakterisiert werden.[187]

Einen bisher kaum eingeschlagenen Weg zeigen Immorlica und Mahdian (2005) auf, indem sie wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen in das Problem einbringen und so zeigen, wie relevant die Anreize zur Manipulation in der Praxis tatsächlich sind. Ein interessantes Modell, welches auf die Frage eingeht, wie viele Frauen unter der M-optimalen Zuordnung durch Manipulation überhaupt profitieren können, stellen Teo, Sethuraman et al. (2001) vor und kommen dabei zu dem Ergebnis, dass in ihrem Modell durchschnittlich 9,52 Prozent der Frauen durch eine Manipulation profitierten. Diesen Fragestellungen muss sowohl anhand empirischer Analysen, simulierter Modelle als auch wahrscheinlichkeitstheoretischer Betrachtungen noch verstärkt nachgegangen werden.

6.3 Implikationen für die Praxis

Als zentrale Implikation für die Praxis lässt sich festhalten, dass ein Übergang von in der Gegenwart teils instabilen und ineffizienten zentralen Zuordnungsverfahren mit starken Manipulationsanreizen zum S-optimalen, stabilen Zuordnungsverfahren des *„college admissions problem“* enorme Effizienzvorteile für alle Beteiligten bewirken und gleichzeitig die Manipulationsanreize stark einschränken kann. Darüber hinaus sinken die Möglichkeiten einer erfolgreichen Manipulation mit zunehmender Größe des Marktes.[188]

Ergin und Sönmez (2006) vergleichen beispielsweise die Zuordnungen des sogenannten *„Boston mechanism“* mit denen der S-optimalen, stabilen Zuordnung des *„college admissions problem“*. Sie kommen zu dem Schluss, dass bei kompletter Information über die Präferenzen der Beteiligten die S-optimale, stabile Zuordnung stets gleichwertig mit der Nash-gleichgewichtigen Zuordnung des *„Boston mechanism“* ist oder diese Pareto-dominiert, so dass sich eindeutige Effizienzgewinne erzielen ließen.[189]

Auch in Deutschland weist die Studienplatzvergabe durch die Zentralstelle für die Vergabe von Studienplätzen (ZVS), die weitgehend einem *„school choice problem“*[190] entspricht, weiterhin Verbesserungspotentiale

[186] Vgl. Zhou (1991), S. 29.
[187] Vgl. Roth (2008), S. 562.
[188] Vgl. Kojima und Pathak (2009); Immorlica und Mahdian (2005).
[189] Vgl. Braun, Dwenger et al. (2010), S. 22; vgl. weiter Ergin und Sönmez (2006).
[190] Siehe Abdulkadiroglu und Sönmez (2003), Abdulkadiroglu, Pathak et al. (2005) sowie Ergin und Sönmez (2006) für eine Einführung in das *„school choice problem“*.

auf, wie Braun, Dwenger et al. (2010) zeigen. Da in Deutschland bei der Zuordnung der Studienplätze nicht die *„deferred acceptance procedure"* zum Einsatz kommt, besteht für Studenten aufgrund der Interdependenzen des angewandten Verfahrens[191] sowie der rangfolgenbasierten Zuteilung die Möglichkeit das Verfahren durch strategisches Verhalten zu manipulieren.[192] Die Manipulation der Studenten führt wiederum zu Ineffizienzen bei der Vergabe der Studienplätze, so dass nicht zwingend den gemäß ihrer Abiturnote besten Bewerbern ein Studienplatz zugeteilt wird, sondern denjenigen, die sich bei der Bewerbung am geschicktesten verhalten.[193] Bemerkenswert erscheint dabei, dass viele Bewerber gemäß empirischer Belege diese Manipulationsmöglichkeit auszunutzen scheinen, indem sie lediglich eine einzige Wunschuniversität angeben, so dass sie im weiteren Verlauf des Zuordnungsverfahrens keiner anderen Universität zugeteilt werden und über das Auswahlverfahren der Hochschulen letztlich doch noch ihrem Erstwunsch zugeordnet werden können.[194] Das postulierte Ergebnis, dass die *„deferred acceptance procedure"* für Studenten den Anreiz eliminiere, ihre Präferenzen falsch anzugeben[195], ist so pauschal in der Theorie jedoch nicht in jedem Fall haltbar, wie Theorem 25 belegt. Eine Manipulation anhand vorzeitiger bilateraler Vereinbarungen ist demnach bei stabilen Zuordnungsverfahren nie ausgeschlossen, auch wenn sie bei der Vergabe von Studienplätzen weitgehend vermieden und einseitig ausgeschlossen wird, da sich die Universitäten an einer Manipulation beteiligen müssten. Darüber hinaus sinken die Anreize bei einem großen Markt, was das Risiko weiter reduziert.

Ein weiteres in der Praxis zu berücksichtigendes Problem ist eine unabhängige Veränderung eines Zuordnungsverfahrens bei nur einer Institution, die auf einem gemeinsamen Markt mit anderen Institutionen um Bewerber konkurriert, beispielsweise Stipendienprogramme. Diese einseitige Veränderung birgt das Risiko, dass die sich der Veränderung unterziehende Institution bei der Auswahl der Bewerber benachteiligt wird oder zumindest fühlt. Sollte auf dem Markt beispielsweise das Problem des *„unravellings"* auftreten, d.h. dass Angebote mitunter schon Jahre vor dem Ende der Ausbildung eines Bewerbers und dem Beginn der Beschäftigung gemacht werden, kann eine Institution durch die Verbesserung des Verfahrens und die Beseitigung des *„unravellings"* ihrerseits benachteiligt werden, da die anderen Institutionen potentiellen Bewerbern weiterhin frühzeitig Angebote unterbreiten, so dass diese spätere Angebote ablehnen.[196]

Darüber hinaus dürfen bei der Betrachtung unterschiedlicher Märkte und der Neuentwicklung und Neuorganisation gegenwärtiger Zuordnungsverfahren auch soziale und gesellschaftliche Aspekte nicht unbeachtet gelassen werden, die Einfluss auf die Verhaltensweisen der Agenten ausüben können. Einmal installierte Verfahren, welche zum Zeitpunkt der Einführung akzeptable und erwünschte Zuordnungen liefern, können aufgrund veränderter Bedürfnisse und Verhaltensweisen im Laufe der Zeit unzureichend werden, so dass eine fortwährende Kontrolle der erzielten Zuordnungen und Verhaltensweisen unausweichlich scheint. Die

[191] Für eine Erläuterung des angewandten Verfahrens durch die ZVS siehe Braun, Dwenger et al. (2010), S. 5.
[192] Vgl. Braun, Dwenger et al. (2010), S. 5 f.
[193] Vgl. Braun, Dwenger et al. (2008), S. 202.
[194] Vgl. Braun, Dwenger et al. (2010), S. 20.
[195] Vgl. Braun, Dwenger et al. (2008), S. 202.
[196] Vgl. Roth (2008), S. 563.

Problematik veränderter gesellschaftlicher Bedingungen auf Zuordnungsverfahren hat sich beispielsweise in den USA bei der Zuordnung angehender Ärzte zu Krankenhäusern gezeigt. Da immer mehr angehende Ärzte nach ihrem Studium verheiratet waren und so als Paar eine Zuordnung zu Stellen in gemeinsamer Nähe bevorzugten, musste das System dahingehend verändert werden, dass auch Paaren bei der Vergabe Rechnung getragen wird, indem sie gemeinsam Präferenzen über Paarungen von Stellen angeben konnten. Bei der Etablierung des ursprünglichen Verfahrens 1950 war diese Problematik gesellschaftlich noch nicht gegeben.[197] Dies führte zu dem neuen Problem, dass die Menge der stabilen Zuordnungen nunmehr leer sein konnte.[198] Empirisch hat sich jedoch gezeigt, dass die Menge stabiler Zuordnungen nur in den seltensten Fällen tatsächlich leer ist. Roth (2008) wirft in seiner umfassenden Arbeit *„Deferred accpetance algorithms: history, theory, practice, and open questions"* die in der Theorie noch abschließend zu beantwortende Frage auf, warum dies der Fall ist. Intuitiv würde man zunächst vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Menge stabiler Zuordnungen leer ist, größer wird, wenn die Menge stabiler Zuordnungen mit wachsendem Markt kleiner wird.

Gleichzeitig ermöglichen die durch das zum Einsatz kommende, dem S-optimalen, stabilen Zuordnungsverfahren nachempfundene Zuordnungsverfahren erhobenen Daten jedoch auch Rückschlüsse auf die Praxis, indem die von den Bewerbern angegebenen Präferenzen empirisch analysiert werden. Auf diese Weise lassen sich wenig präferierte Universitäten und Schulen identifizieren, um den Fokus auf die möglichen Ursachen zu legen und diese bestenfalls auszumerzen.

[197] Vgl. Roth (2008), S. 551 f.

[198] Für nähere Erläuterungen zu der hier nur kurz angesprochenen Thematik, die sich auch in den Ergebnissen deutlich von denen dieser Arbeit unterscheidet, da die meisten hier postulierten Theoreme keine Gültigkeit mehr besitzen, sei exemplarisch auf Klaus und Klijn (2005) und Aldershof und Carducci (1996) verwiesen. So muss beispielsweise das „Lattice theorem" (Theorem 2a) nicht mehr zwingend gelten, es müssen keine optimalen, stabilen Zuordnungen mehr existieren und auch die Menge der nicht zugeordneten Agenten ist nicht bei jeder stabilen Zuordnung identisch.

Literatur

Abdulkadiroglu, A. (2005): College admissions with affirmative action. *International Journal of Game Theory* 33(4); S. 535-549

Abdulkadiroglu, A., P. Pathak und A. Roth (2005): The New York City High School Match. *The American Economic Review* 95(2); S. 364-367

Abdulkadiroglu, A., P. Pathak und A. Roth (2009): Strategy-proofness versus Efficiency in Matching with Indifferences: Redesigning the NYC High School Match. *The American Economic Review 99(5)*; pp. 1954-1978(25)

Abdulkadiroglu, A. und T. Sönmez (2003): School choice: A mechanism design approach. *The American Economic Review* 93(3); S. 729-747

Aldershof, B. und O. Carducci (1996): Stable matchings with couples. *Discrete Applied Mathematics* 68(1-2); S. 203-207

Balinski, M. und T. Sönmez (1999): A tale of two mechanisms: student placement. *Journal of Economic Theory* 84(1); S. 73-94

Berger, R. und J. Multerer: (2007): Ohne Spielregeln geht es nicht - Ökonomie-Nobelpreis geht an drei US-Wissenschaftler. *economag.de - Wissenschaftsmagazin für Betriebs- und Volkswirtschaftslehre* 02/2007; Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH;
http://www.economag.de/magazin/2007/2/28+Ohne+Spielregeln+geht+es+nicht.

Braun, S., N. Dwenger und D. Kübler (2008): Studienplatzvergabe: Die cleversten Bewerber kommen zum Zug. *Wochenbericht* 75(16); S. 198-202 http://ideas.repec.org/a/diw/diwwob/75-16-1.html.

Braun, S., N. Dwenger und D. Kübler (2010): Telling the Truth May Not Pay Off: An Empirical Study of Centralized University Admissions in Germany, *The B.E. Journal of Economic Analysis & Policy*: Vol. 10: Iss. 1 (Advances), Article 22.

Committee, N. P. (2007): The Prize in Economic Sciences 2007 - Information for the public. The Royal Swedish Academy of Sciences http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2007/info.pdf.

Ergin, H. und T. Sönmez (2006): Games of school choice under the Boston mechanism. *Journal of Public Economics* 90(1-2); S. 215-237

Fiestras-Janeiro, G., F. Klijn und E. Sanchez (2004): Manipulation of optimal matchings via predonation of endowment. *Mathematical Social Sciences* 47(3); S. 295-312

Gale, D. und L. S. Shapley (1962): College Admissions and the Stability of Marriage. *American Mathematical Monthly* 69(1); S. 9-15

Gale, D. und M. Sotomayor (1985): Ms. Machiavelli and the Stable Matching Problem. *American Mathematical Monthly* 92; S. 261-268

Huang, C. (2006): How Hard is it to Cheat in the Gale-Shapley Stable Matching Algorithm? Technical Report TR2005-565, Computer Science Department, Dartmouth College

Immorlica, N. und M. Mahdian (2005): Marriage, honesty and stability. *ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms 2005*; S. 53-62

Jin, H. (2005): Algorithmen für Matching-Märkte. Mathematische Grundlagen der Informatik. Cottbus, Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus**:** 1-66.

Klaus, B. und F. Klijn (2005): Stable matchings and preferences of couples. *Journal of Economic Theory* 121(1); S. 75-106

Knörzer, M. (2009): Personnel Assignment-Problems. S. 1-21 http://ssrn.com/abstract=1342633.

Kojima, F. und P. Pathak (2009): Incentives and stability in large two-sided matching markets. *The American Economic Review 99(3);* pp. 608-627(20).

Krishna, V. und M. Perry (1998): Efficient mechanism design. *Unpublished Paper*; S. 1-23

Maskin, E. und S. Baliga (2003): Mechanism design for the environment. *Handbook of Environmental Economics* 1; S. 305-324

Myerson, R. (1981): Optimal auction design. *Mathematics of operations research*; S. 58-73

Nisan, N. und A. Ronen (2001): Algorithmic Mechanism Design. *Games and Economic Behavior* 35; S. 166-196

Osborne, M. und A. Rubinstein (1994): A course in game theory, MIT press.

Postlewaite, A. (1979): Manipulation via endowments. *The Review of Economic Studies*; S. 255-262

Rieck, P. D. C. (2009). Professor Rieck's Spieltheorie-Seite.
http://www.spieltheorie.de/Spieltheorie_Grundlagen/mechanismus-design.htm.

Roth, A. (1982): The economics of matching: Stability and incentives. *Mathematics of operations research* 7(4); S. 617-628

Roth, A. (1984a): The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory. *The Journal of Political Economy*; S. 991-1016

Roth, A. (1984b): Misrepresentation and stability in the marriage problem. *Journal of Economic Theory* 34(2); S. 383–387

Roth, A. (1985): The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem. *Journal of Economic Theory* 36(2); S. 277-288

Roth, A. (2008): Deferred acceptance algorithms: history, theory, practice, and open questions. *International Journal of Game Theory* 36(3); S. 537-569

Roth, A. und M. Sotomayor (1990): Two-sided matching: A study in game-theoretic modeling and analysis, Cambridge University Press.

Sertel, M. und I. Ozkal-Sanver (2002): Manipulability of the men-(women-) optimal matching rule via endowments. *Mathematical Social Sciences* 44(1); S. 65-83

Sönmez, T. (1997): Manipulation via capacities in two-sided matching markets. *Journal of Economic Theory* 77(1); S. 197-204

Sönmez, T. (1999): Can Pre-Arranged Matches be Avoided in Two-Sided Matching Markets? *Journal of Economic Theory* 86(1); S. 148-156

Storbeck, O. (2007): Nobelpreis für Wirtschaft - Der schwer begreifliche Mechanismus. *Handelsblatt, 15.10.2007*; Verlagsgruppe Handelsblatt GmbH; http://www.handelsblatt.com/politik/nachrichten/der-schwer-begreifliche-mechanismus;1336946;0.

Teo, C., J. Sethuraman und W. Tan (2001): Gale-Shapley stable marriage problem revisited: Strategic issues and applications. *Management Science* 47(9); S. 1252-1267

Zhou, L. (1991): Stable matchings and equilibrium outcomes of the Gale-Shapley's algorithm for the marriage problem. *Economics Letters* 36; S. 25-29

DISCUSSION PAPERS 2011

Marie-Pierre Dargnies	**Men too sometimes shy away from competition: The case of team competition**	SP II 2011 – 201
Marie-Pierre Dargnies	**Social Identity and Competitiveness**	SP II 2011 – 202
Frank Hüber	**Manipulationsanreize im Gale-Shapley-Algorithmus: ein Literaturüberblick**	SP II 2011 – 203

Bei Ihren Bestellungen von WZB-Papers schicken Sie bitte unbedingt einen an Sie adressierten Auf-kleber mit sowie je paper eine Briefmarke im Wert von 0,51 Euro oder einen "Coupon Reponse International " (für Besteller aus dem Ausland)	*Please send a self addressed label and postage stamps in the amount of 0.51 Euro or a "Coupon-Reponse International" (if you are ordering from outside Germany) for each WZB-paper requested*

Bestellschein — *Order Form*

Absender / Return Address:

Wissenschaftszentrum Berlin
für Sozialforschung
Presse- und Informationsreferat
Reichpietschufer 50

D-10785 Berlin-Tiergarten

Hiermit bestelle ich folgende(s) Discussion paper(s):

Please send me the following Discussion paper(s):

Bestell-Nr. / Order no.	**Autor/in, Kurztitel /Author(s) / Title(s) in brief**